Statistica

Esercitazione III

6 Ottobre 2022

Esercizio 1 (Medie potenziate per variabile quantitativa discreta) La seguente tabella riporta la distribuzione di frequenza per una certa variabile X:

x_i	n_i
1	6
2	9
3	12
4	9
5	3
7	1
	40

1. Rappresentare graficamente la distribuzione di X e le sue frequenze relative cumulate (c.d. *funzione di ripartizione*).
2. Determinare la moda e la mediana di X.
3. Calcolare $\mu^{(-1)}$, $\mu^{(0)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$. Commentare i risultati ottenuti con riferimento al teorema fondamentale delle medie potenziate.

Esercizio 2 (Linearità, media degli scarti e proprietà di minimo della media aritmetica)

1. Si considerino le variabili X e Y aventi medie $M(X) = 2$ e $M(Y) = -1$, rispettivamente. Determinare la media della variabile $Z = 3X + 4Y - 2$.
2. Sia data la seguente distribuzione della variabile X:

x_i	n_i
2	9
4	12
6	9
	30

(a) Quale valore deve essere sottratto alla variabile X affinchè la variabile così risultante abbia media nulla?

(b) Quale valore deve essere sottratto alla variabile X affinchè la variabile così risultante abbia la più piccola media quadratica possibile?

Esercizio 3 (Proprietà associativa della media aritmetica) La seguente tabella riporta la regione di provenienza e il numero di figli di 8 soggetti intervistati:

Regione	*Numero figli*
Piemonte	2
Lazio	1
Lazio	3
Sicilia	1
Piemonte	0
Piemonte	3
Sicilia	3
Sicilia	2

1. Determinare la media aritmetica della variabile *Numero figli*.
2. Costruire la tabella di frequenza congiunta e determinare la media aritmetica della variabile *Numero figli* in base al gruppo *Regione*.
3. Calcolare nuovamente la media aritmetica della variabile *Numero figli* utilizzando i risultati ottenuti al punto precedente e commentare.

Esercizio 4 (Proprietà associativa della media aritmetica) Definita una partizione degli abitanti di una regione in due gruppi, indicati nel seguito con 1 e 2, si sono costruiti i seguenti prospetti relativi alla distribuzione dei redditi in ciascun gruppo.

R_i (gruppo 1)	n_i
$10 \dashv 15$	1800
$15 \dashv 30$	1500
$30 \dashv 50$	2700

R_i (gruppo 2)	n_i	f_i
$10 \dashv 15$		0.15
$15 \dashv 30$		0.25
$30 \dashv 50$		0.60

Sapendo che il reddito medio di tutti gli abitanti della regione è 30, si determini per il gruppo 2 il numero n_i di soggetti appartenenti a ciascuna classe di reddito.

Mod. S. 246

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE MILANO

ESERCIZIO 1

1.

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
1	6	6	0.15	0.15
2	9	15	0.225	0.375
3	12	27	0.3	0.675
4	9	36	0.225	0.9
5	3	39	0.075	0.975
7	1	40	0.025	1
	40		1	

X: VARIABILE QUANTITATIVA DISCRETA

DIAGRAMMA A BASTONCINI

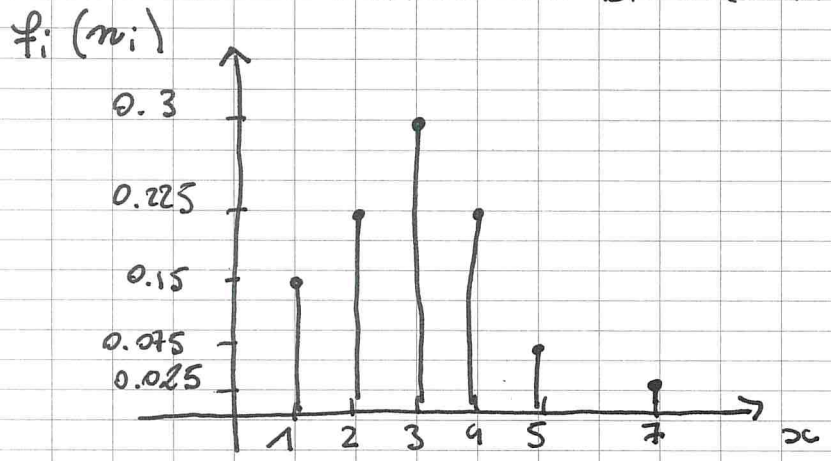
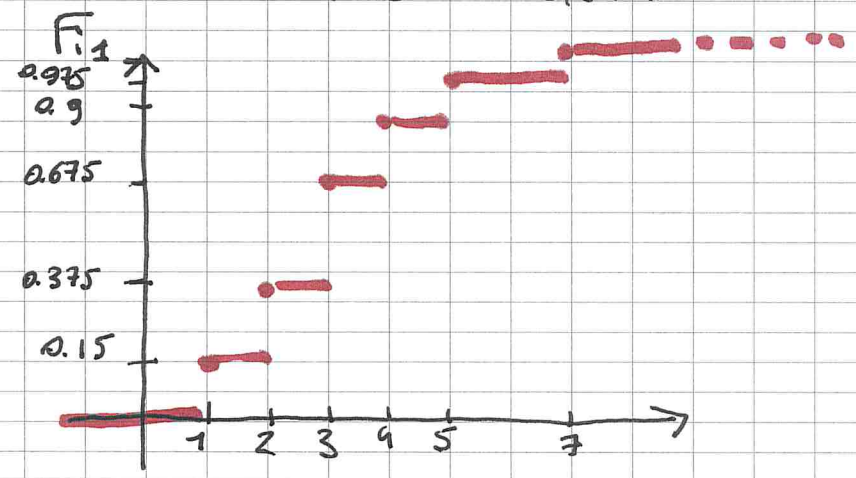


GRAFICO A GRADINI



2. Moda (X) = 3, poiché $f_i = 0.3$; $n = 40$ pari $\Rightarrow x_{(\frac{n}{2})} = x_{(20)} = 3$;

$x_{(\frac{n}{2}+1)} = x_{(21)} = 3 \rightarrow$ Mediana (X) $= \frac{3+3}{2} = 3$

3. $$\mu^{(r)} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot n_i \right)^{1/r} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot f_i \right)^{1/r}$$

MEDIA ARMONICA : $$\mu^{(-1)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} \cdot f_i} = \frac{1}{\frac{1}{1} \cdot 0.15 + \frac{1}{2} \cdot 0.225 + \dots + \frac{1}{7} \cdot 0.025} = 2.2866$$

MEDIA GEOMETRICA : $$\mu^{(0)} = \prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i} = 1^{0.15} \cdot 2^{0.225} \cdot \dots \cdot 7^{0.025} = 2.6296$$

1° MODO

2° MODO : $$\ln \mu^{(0)} = \ln \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i} \right) = \sum_{i=1}^{k} \ln x_i^{f_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\ln x_i) \cdot f_i = \ln 1 \cdot 0.15 + \ln 2 \cdot 0.225 + \dots + \ln 7 \cdot 0.025$$

$$= 0.9668$$

$$\mu^{(0)} = \exp\left(\ln \mu^{(0)}\right) = \exp(0.9668) = 2.6296$$

MEDIA ARITMETICA :

$$\mu^{(1)} = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.225 + \dots + 7 \cdot 0.025$$

$$= 2.95$$

MEDIA QUADRATICA

$$\mu^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot f_i \right)^{1/2} = \sqrt{1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.225 + \dots + 7^2 \cdot 0.025} = 3.2326$$

$\mu^{(-1)} < \mu^{(0)} < \mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ COERENTE CON IL TH. FOND.

CATTOLICA DEL S. CUORE UNIVERSITÀ MILANO

Mod. S. 246

ESERCIZIO 2

1. $M(X) = 2$; $M(Y) = -1$; $Z = 3X + 4Y - 2$

$$M(Z) = M(3X + 4Y - 2) = M(3X) + M(4Y) + M(-2)$$
$$= 3M(X) + 4M(Y) - 2 = 3 \cdot 2 + 4(-1) - 2 = 0$$

2.

x_i	n_i	f_i
2	9	0.3
4	12	0.4
6	9	0.3
	30	

a) $Y = X - a$ T.C. $M(Y) = 0$

$$\Rightarrow M(X - a) = 0 \qquad M(X) - a = 0$$
$$a = M(X) = 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.3 = 4.$$

QUESTO RISULTATO ERA ATTESO, IN BASE ALLA PROPRIETÀ PER CUI LA MEDIA DEGLI SCARTI TRA I VALORI DI UNA VARIABILE E LA SUA MEDIA ARITMETICA È 0.

b) $Z = X - a$ T.C. $\mu_Z^{(2)}$ SIA MINIMA.

$\mu_Z^{(2)} = \sqrt{M(Z^2)}$ È MINIMA SE E SOLO SE $M(Z^2)$ È MINIMA.

$M(Z^2) = M((X-a)^2)$ DALLA TEORIA SAPPIAMO CHE TALE ESPRESSIONE È MINIMA QUANDO $a = M(X) = 4$

$$\mu_Z^{(2)} = \sqrt{M[(X-4)^2]} = \sqrt{(2-4)^2 \cdot 0.3 + (4-4)^2 \cdot 0.4 + (6-4)^2 \cdot 0.3} = 1.5492$$

CATTOLICA DEL S. CUORE · UNIVERSITÀ · MILANO

ESERCIZIO 3

1. X = "n° DI FIGLI"

x_i	n_i	f_i
0	1	0.125
1	2	0.25
2	2	0.25
3	3	0.375
	8	1

$$M(X) = 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.375 = 1.875$$

2.

REGIONE \ X	0	1	2	3	
PIEMONTE	1	0	1	1	3
LAZIO	0	1	0	1	2
SICILIA	0	1	1	1	3
	1	2	2	3	8

$$M(X|PIEM.) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{0}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 5/3$$

$$M(X|LAZIO) = 0 \cdot \frac{0}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{0}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$M(X|SICILIA) = 0 \cdot \frac{0}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

3. $$M(X) = \left[M(X|PIEM.) \cdot 3 + M(X|LAZIO) \cdot 2 + M(X|SIC.) \cdot 3\right] / (3+2+3) = \frac{5/3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{8} = 1.875$$

MEDIA TOT. = MEDIA DELLE MEDIE PARZIALI (PROP. ASSOC.)

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE MILANO

Mod. S. 246

Mod. S. 246

UNIVERSITA' CATTOLICA DEL S. CUORE MILANO

ESERCIZIO 4

R_i (1)	R_i^c	n_i
10–15	12.5	1800
15–30	22.5	1500
30–50	40	2700

$n_1 = 6.000$

R_i (2)	R_i^c	n_i	f_i
10–15	12.5	1575	0.15
15–30	22.5	2625	0.25
30–50	40	6300	0.6
		10'500	

PROP. ASSOC. MEDIA ARIT.

$$M(R) = 30 = \frac{M(R|1)\cdot n_1 + M(R|2)\cdot n_2}{n_1 + n_2}$$

$n_1 = 6000$

$$M(R|1) = \frac{1}{6000}\left(12.5\cdot 1800 + 22.5\cdot 1500 + 40\cdot 2700\right) = 27.375$$

$$M(R|2) = 12.5\cdot 0.15 + 22.5\cdot 0.25 + 40\cdot 0.6 = 31.5$$

$$30 = \frac{27.375\cdot 6000 + 31.5\cdot n_2}{6000 + n_2}$$

MOLTIPLICO PER $(6000 + n_2)$

$$(6000 + n_2)\,30 = 27.375\cdot 6000 + 31.5\cdot n_2$$

Mod. S. 246

UNIVERSITA' CATTOLICA DEL S. CUORE MILANO

$$6000\left(30 - 27.375\right) = n_2\left(31.5 - 30\right)$$

$$15750 = 1.5\, n_2$$

$$n_2 = \frac{15750}{1.5} = 10'500$$