Statistica

Esercitazione XII

20 Dicembre 2022

Esercizio 1 Un'urna è composta da 6 gettoni gialli e 4 gettoni blu. Si consideri l'esperimento casuale "estrazione con reimmissione di 2 gettoni dall'urna".

1. Si costruisca lo spazio probabilistico associato all'esperimento.
2. Un gioco, per cui è prevista una posta di 1 euro, consiste nell'estrazione con reimmissione di 2 gettoni dall'urna e comporta l'obbligo di pagare altri 4 euro per ogni gettone giallo che si presenta, mentre si vincono 8 euro per ogni gettone blu che si presenta. Si costruisca la variabile casuale $G =$ "guadagno del giocatore" e si stabilisca se il gioco è equo.
3. Si calcoli la probabilità di ottenere almeno 52 gettoni gialli in 100 estrazioni con reimmissione dall'urna.

Esercizio 2 Una linea di produzione confeziona pacchetti di caramelle il cui peso complessivo è fissato al valore nominale di 250 g. Sapendo che detti pesi seguono una v.c. $N(\mu = 250, \sigma^2 = 21)$ e che si ritengono difettosi i pacchetti con peso inferiore del 3% rispetto al peso nominale,

1. si calcoli la probabilità che la linea produca pezzi difettosi;
2. si calcoli la probabilità che su 100 pacchetti estratti (con reimmissione) dal flusso produttivo, almeno il 5% risulti fuori norma.

Esercizio 3 Date due differenti urne U_1 e U_2 contenenti palline numerate, un esperimento casuale consiste nell'estrarre una pallina da ciascuna urna. Sapendo che nell'urna U_1 vi sono 5 palline con numeri da 1 a 5 e che nell'urna U_2 vi sono 3 palline con il numero 1, 1 pallina con il numero 3 e 6 palline con il numero 5:

1. si costruisca la distribuzione di probabilità della variabile casuale X "risultato estrazione dall'urna U_2";
2. si calcoli la probabilità che la somma dei numeri delle 2 palline estratte sia 6;

3. si calcoli la probabilità che, su 100 estrazioni con reinserimento dall'urna U_2, almeno 20 palline presentino il numero 1.

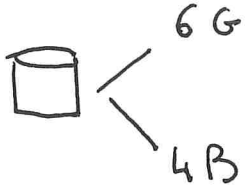
Esercizio 4 Un'urna contiene 5 palline nere e 15 palline rosse.

1. Si calcoli la probabilità che, estraendo senza reimmissione 5 palline dall'urna, si ottengano 3 palline nere.
2. Indicata con Y la variabile casuale "numero di palline nere ottenute in 100 estrazioni con reimmissione dall'urna", si calcoli $P(Y \leq 6)$.
3. Sia ora $p = 0.8729$. Si determini il valore del percentile di ordine p della v.c. Normale $X \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$, vale a dire il valore x_p tale che $P(X \leq x_p) = p$.

Esercizio 5 Una pasticceria produce Sachertorte il cui peso in grammi X si distribuisce secondo una variabile aleatoria Normale con media $\mu = 500$ e scarto quadratico medio $\sigma = 16$.

1. Si calcoli la probabilità che una torta pesi meno di 460 grammi.
2. Sapendo che vengono esclusi dalla vendita i prodotti con peso inferiore a 460 grammi e che in una giornata sono state prodotte 10 torte, si calcoli la probabilità che tutte vengano messe in vendita, descrivendo la variabile aleatoria utilizzata.
3. Il guadagno sul prezzo di vendita di ciascuna torta è di 10 euro. Si calcoli il guadagno medio atteso per la giornata (si ipotizzi che tutte le Sachertorte messe in vendita vengano acquistate).

ESERCIZIO 1



1. $\Omega = \{GG, GB, BG, BB\}$

$$P(GG) = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$$

$$P(GB) = P(BG) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$$

$$P(BB) = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{16}{100}$$

NOTATE CHE: $\frac{36}{100} + 2 \cdot \frac{24}{100} + \frac{16}{100} = 1$

2. $$\text{GUADAGNO}(\omega) = \begin{cases} -1 - 8 = -9, & \omega = GG \\ -1 + 4 = 3, & \omega = GB \text{ o } BG \\ -1 + 16 = 15, & \omega = BB \end{cases}$$

$$M(\text{GUADAGNO}) = -9 \cdot P(GG) + 3\, P(GB \cup BG) + 15 \cdot P(BB)$$

$$= -9 \cdot \frac{36}{100} + 3 \cdot \frac{24}{100} \cdot 2 + 15 \cdot \frac{16}{100} = \frac{6}{10} = 0.6 > 0$$

IL GIOCO NON È EQUO $\left(M(\text{GUADAGNO}) \neq 0\right)$ ED È FAVOREVOLE AL PARTECIPANTE $\left(M(\text{GUADAGNO}) > 0\right)$

3. $P(G) = \frac{6}{10}$; X = "n° DI GETTONI BIANCHI SU 100 ESTRAZIONI CON REIMMISSIONE" (e)

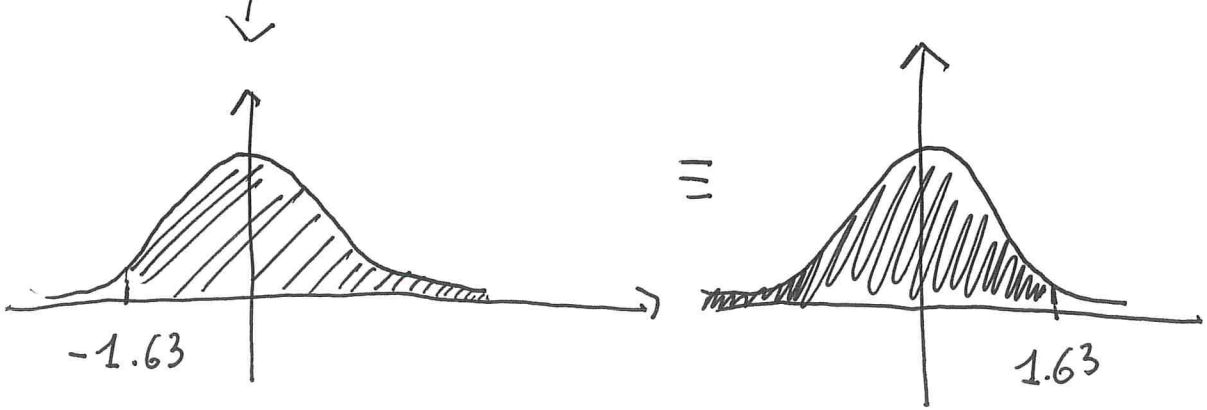
$$\Rightarrow \quad X \sim Bin\left(n = 100;\ p = \frac{6}{10}\right) \ ; \quad X \overset{a}{\sim} N\left(np = 100 \cdot \frac{6}{10} = 60;\ np(1-p) = 100 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = 24\right)$$

$$P(X \geq 52) = P(X = 52) + P(X = 53) + \dots + P(X = 100)$$

DISPENDIOSO DA UN PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE

$$P(X \geq 52) \overset{T.L.C.}{\approx} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq \frac{52 - 60}{\sqrt{24}}\right) = \underbrace{P(Z \geq -1.63)}_{} =$$

$$= P(Z \leq 1.63) = 0.9484$$



ESERCIZIO 2

X = "PESO DI UN PACCHETTO DI CARAMELLE"

$X \sim N(\mu = 250,\ \sigma^2 = 21)$

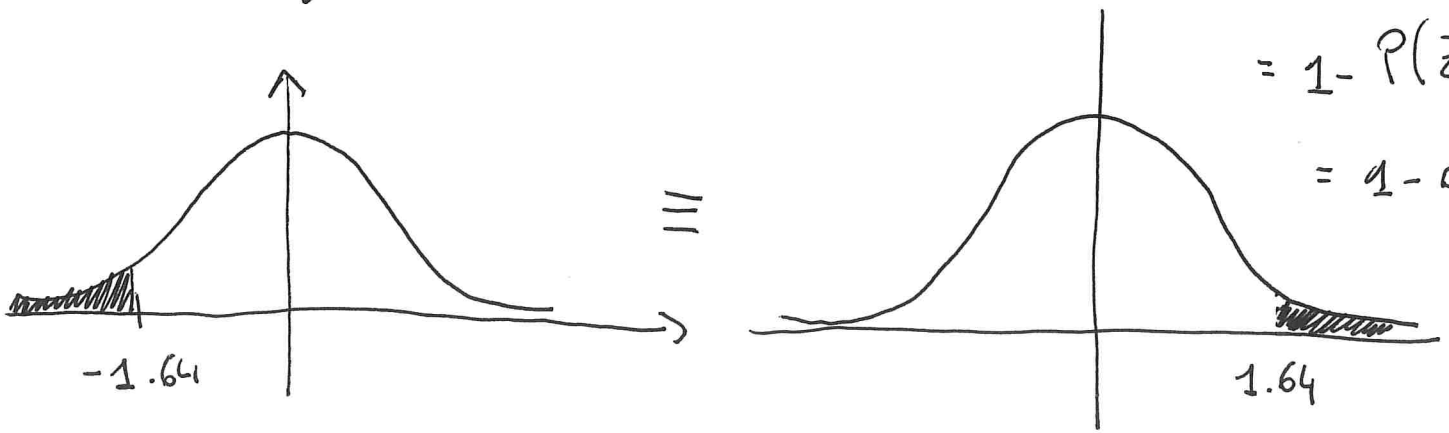
UN PACCHETTO È DIFETTOSO SE $X < 250 - 3\% \cdot 250 = 97\% \cdot 250 = 242.5$

1. $P(X < 242.5) \overset{\text{STAND.}}{=} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < \dfrac{242.5 - 250}{\sqrt{21}}\right) = P(Z < -1.64)$

$= P(Z > 1.64) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.64)$

$= 1 - 0.9495 = 0.0505$



2. Y_i = " VAR. CASUALE CHE INDICA SE IL PACCHETTO i-ESIMO È DIFETTOSO "

$$= \begin{cases} 1, & X_i < 242.5 \rightarrow p = 0.0505 \\ 0, & X_i \geq 242.5 \rightarrow 1-p = 0.9495 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 100 \; ; \; Y_i \sim Ber(0.0505)$$

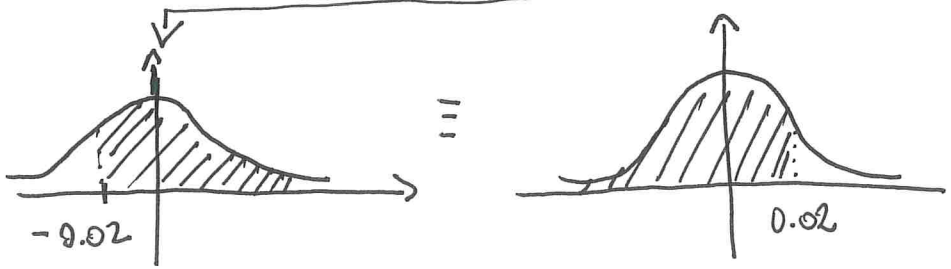
S = " n° DI PACCHETTI DIFETTOSI SU 100 ESTRATTI CON REIMMISSIONE "

$$= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100} \Rightarrow S \sim Bin(n=100, p=0.0505)$$

$$S \overset{a}{\sim} N(np = 5{,}05 ; np(1-p) = 4.795)$$

$$P(S \geq 5) \overset{T.L.C.}{\approx} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq \frac{5 - 5.05}{\sqrt{4.795}}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0.02) = P(Z \leq 0.02) = 0.5080$$



ESERCIZIO 3

$$U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad U_2 : \{\underbrace{1, 1, 1}_{3} ; \underbrace{3}_{1} ; \underbrace{5, 5, 5, 5, 5, 5}_{6}\} = 10$$

1. X_2 = "RISULTATO ESTRAZIONE DA U_2"

x_2	$P(x_2)$
1	3/10
3	1/10
5	6/10
	1

2. X_1 = "RISULTATO ESTRAZIONE DA U_1"

$$P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1, X_2 = 5) + P(X_1 = 3, X_2 = 3) + P(X_1 = 5, X_2 = 1)$$

$$\overset{\text{INDIP.}}{=} P(X_1 = 1)P(X_2 = 5) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 3) + P(X_1 = 5)P(X_2 = 1)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \underbrace{\left(\frac{6}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \right)}_{=1} = \frac{1}{5}$$

3. $X_{2,i}$ = "RISULTATO DELL'ESTRAZIONE i-ESIMA DA U_2"

$$P(X_{2;i} = 1) = 3/10$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{SE } X_{2,i} = 1 \rightarrow p = 3/10 \\ 0, & \text{SE } X_{2,i} \neq 1 \rightarrow 1-p = 7/10 \end{cases} \Rightarrow Y_i \sim Ber(3/10)$$

S = "NUMERO DI PALLINE NUMERATE CON 1 OTTENUTO SU 100 ESTRAZ. CON RIMMISSIONE"

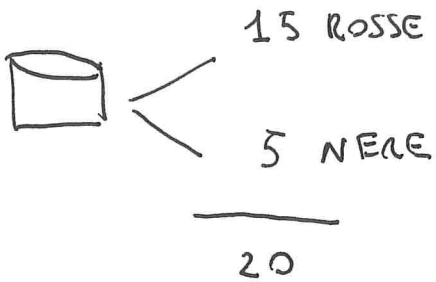
$$= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100} \Rightarrow S \sim Bin(n=100;\ p=3/10)$$

$$S \overset{a}{\sim} N(np = 30;\ np(1-p) = 21)$$

$$P(S \geq 20) \overset{T.L.C.}{\approx} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq \frac{20-30}{\sqrt{21}}\right) = P(Z \geq -2.18) =$$

$$= P(Z \leq 2.18) = 0.9854$$

ESERCIZIO 4



1. X = "n° DI PALLINE NERE ESTRATTE SENZA REIMMISSIONE SU 5 ESTRAZIONI"

$$X \sim \text{Ipergeom.}\left(N = 20;\ M = 5;\ n = 5\right)$$

N → n° TOT. DI PALLINE; M → n° PALLINE FAVOREVOLI NELL'URNA; n → n° DI ESTRAZIONI

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{15}{2}}{\binom{20}{5}} = 0.0677$$

2. Y = "n° DI PALLINE NERE OTTENUTE SU 100 ESTRAZIONI CON REIMMISSIONE" $\Rightarrow Y \sim Bin\left(n = 100;\ p = \frac{5}{20} = 0.25\right)$

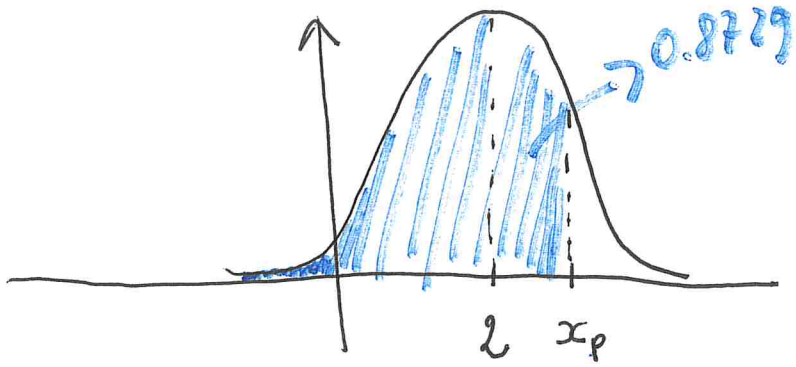
$$P(Y \leq 6) \overset{T.L.C.}{\approx} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \leq \frac{6-25}{\sqrt{18.75}}\right) = P(Z \leq -4.39) = P(Z > 4.39)$$

$$= 1 - P(Z \leq 4.39) = 1 - 1 = 0$$

$$Y \overset{a}{\sim} N\left(np = 25;\ np(1-p) = 18.75\right)$$

3. $p = 0.8729$, $X \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$

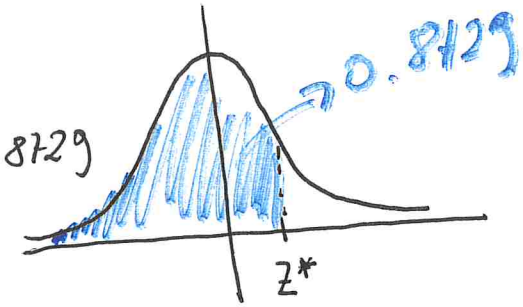
$$P(X \leq x_p) = 0.8729$$



STANDARDIZZO

$$P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \leq \frac{x_p - 2}{\sqrt{1}}\right) = 0.8729$$

$z^* := x_p - 2 \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq z^*) = 0.8729$



$z^* = 1.14 = x_p - 2 \Rightarrow x_p = 1.14 + 2 = 3.14$

ESERCIZIO 5

X = "PESO DI UNA TORTA" ; $X \sim N(\mu = 500, \sigma^2 = 16^2)$

1. $$P(X < 460) \overset{\text{STAND.}}{=} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < \frac{460-500}{16}\right) = P(Z < -2.5)$$

$$= P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

2. Y_i = "VAR. CASUALE CHE INDICA SE ~~UNA~~ LA TORTA i-ESIMA È MESSA IN VENDITA"

$$= \begin{cases} 1, & \text{SE } X_i \geq 460 \rightarrow p = 1 - 0.0062 = 0.9938 \\ 0, & \text{SE } X_i < 460 \rightarrow 1-p = 0.0062 \end{cases} \Rightarrow Y_i \sim Ber(0.9938)$$

S = "n° DI TORTE MESSE IN VENDITE SULLE 10 PRODOTTE" $= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{10} \Rightarrow S \sim Bin(n = 10; 0.9938)$

$$P(S = 10) = \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^{10-10} = p^{10} = 0.9938^{10} = 0.9397$$

3. G = "GUADAGNO ATTESO DALLA VENDITA DELLE TORTE MESSE IN VENDITA"

$$M(G) = M(10 \cdot S) = 10 \cdot M(S) = 10 \cdot 10 \cdot 0.9938 = 99.38 .$$

$$S \sim Bin(n=10, p=0.9938)$$