►6. Disequazioni fratte

Ricordiamo la

DEFINIZIONE: una disequazione è **frazionaria** o **fratta** quando il suo denominatore contiene l'incognita.

Conosciamo, per averla applicata alle disequazioni fratte con termini di primo grado, la
procedura per determinare I.S. (Insieme **S**oluzione**) di una disequazione frazionaria (fratta)**

- 1° passo: applicando il primo principio si trasportano tutti i termini nel primo membro;
- 2° passo: si calcola l'espressione al primo membro conducendo la disequazione alla forma $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$;
- 3° passo: si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 oppure N(x)≥ 0 (a secondo della richiesta) con D(x)>0;
- 4° passo: si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri della frazione, se richiesti;
- 5° passo: si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere con le conoscenze raggiunte nello studio delle disequazioni di secondo grado.

Problema

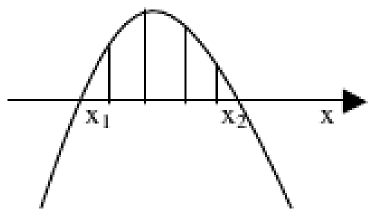
Determinare, al variare di x in R, il segno dell'espressione $E = \frac{4}{4x^2-1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{x}{1-2x}$

Osservazioni preliminari:

- l'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di x del Dominio dell'espressione stessa.
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla.
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

Strategia risolutiva:

- 1° passo: determiniamo il risultato dell'operazione assegnata: $E = \frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$
- 2° passo: determiniamo il **D**ominio di **E**: C.E. $2x+1 \neq 0 \wedge 2x-1 \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
- 3°passo: per studiare il segno impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)} \geq 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema
- 4° passo: studiamo il segno del numeratore e del denominatore:
  segno N: $-2x^2+x+3 \geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1+24 = 25$, positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola rappresentativa $y = -2x^2+x+3$ è del tipo in figura per cui essendo $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{3}{2}$ si ha $N \geq 0$ per $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$



  segno D: il denominatore è composto da due fattori di primo grado, quindi $d_1 > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$; $d_2 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$

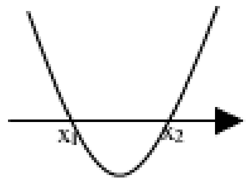
- 5° passo: Costruiamo la tabella dei segni:

		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
segno N	−	•	+		+		+	•	−
segno d_1	−		−		+		+		+
segno d_2	−		−		−		+		+
segno E	−		+		−		+		−

Dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l'espressione E si annulla per $x=-1 \vee x=\frac{3}{2}$
- l'espressione E è positiva per $x \in I=\left\{x \in \mathbb{R} \left| -1<x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$
- l'espressione E è negativa per $x \in I=\left\{x \in \mathbb{R} \left| x<-1 \vee -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \vee x>\frac{3}{2}\right.\right\}$

Osserviamo che **il segno del denominatore** si può determinare riconoscendolo come polinomio di secondo grado con due zeri reali e dunque rappresentabile con una parabola del tipo in figura per cui possiamo affermare $D>0$ per $x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{2}$ in cui sono rispettate le C.E.



Con questo procedimento la tabella dei segni sarebbe modificata nel modo seguente lasciando inalterato il risultato.

		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
segno N	−	•	+		+		+	•	−
segno D	+		+		−		+		+
segno E	−		+		−		+		−

119 Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione fratta: $3-\frac{1}{2x+1} \geq \frac{1}{1-x}$.

- 1° passo: trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro, applicando il primo principio delle disequazioni: $3-\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{1-x} \geq 0$
- 2° passo: eseguite i calcoli …………………………………………………….. trasformando il primo membro in una **frazione** algebrica; verificate che si ottiene: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)} \geq 0$
- 3° passo: studiate il segno del numeratore e del denominatore:
  segno N: $-6x^2+2x+1 \geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-6x^2+2x+1=0$, calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=7$, positivo per cui si hanno due soluzioni …………………. ; la parabola rappresentativa $y=-6x^2+2x+1$ è del tipo …………………… per cui essendo $x_1=$……… e $x_2=$……… si ha $N \geq 0$ per ………$\leq x \leq$………
  segno D: $(2x+1)\cdot(1-x)>0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x=-\frac{1}{2}$ e $x_2=1$ e la parabola rappresentativa volge la concavità verso il basso; ………………
  pertanto si ha $D>0$ per ……………… che rispetta le C.E.: $x_1 \neq -\frac{1}{2} \wedge x_2 \neq 1$
- 4° passo: completate la tabella dei segni:

		$-\frac{1}{2}$							
segno N				•		•			
segno D									
segno frazione									

- 5° passo: controllate che $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x<-\frac{1}{2}\vee\frac{1-\sqrt{7}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{6}\vee x>1\right\}$

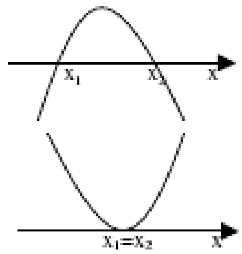
120 Determinate per quali valori reali la frazione $f=\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}$ risulta **non superiore** a 1.

Osserviamo che il problema chiede di determinare l'I.S. della disequazione fratta $\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}\le 1$

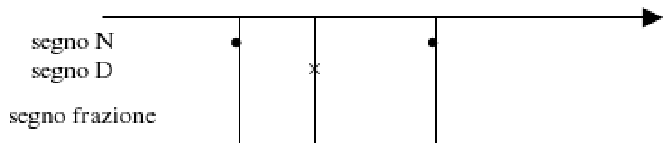
equivalente a $\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}-1\le 0$

- 1° passo: eseguite i calcoli per condurre la disequazione alla forma $f\le 0$: ……………………..
- 2° passo: verificato che si ottiene $\frac{-3x^2+14x-8}{(2x-3)^2}\le 0$, procedete nella ricerca del

segno N: $-3x^2+14x-8\ge 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata ……………, essendo il discriminante $\Delta=$……… positivo, si hanno due soluzioni ………………………; la parabola rappresentativa è del tipo in figura per cui $N\ge 0$ per ………$\le x\le$………
segno D: il polinomio al denominatore è un quadrato di binomio; l'equazione associata ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=$………… e la parabola rappresentativa è del tipo, quindi $D>0$ per per $x\ne$……



- 3° passo: costruite la tabella dei segni

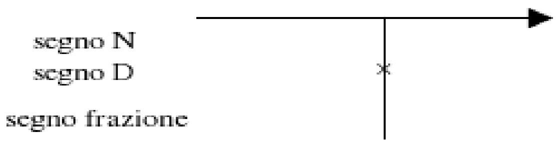


- 4° passo: *I.S.* = ……………………………………………

121 Attribuite il valore di verità alla proposizione: "Per qualunque valore reale la frazione algebrica $f=\frac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}$ assume segno positivo."

Osserviamo che per rispondere alla richiesta del problema dobbiamo determinare il segno della frazione assegnata e dunque risolvere la disequazione: $\frac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}>0$.

Determinate il
segno N: $2x^2+7x+8>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ………………………….. per cui $N>0$ per ……………………….
segno D: $2x^2-4x+2>0\ \rightarrow\ 2(x-1)^2>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ……………………………… per cui $D>0$ per ………………….
Dai risultati ottenuti e dall'analisi della tabella dei segni si deduce $f>0$ per ………….. , quindi la proposizione è ……………



122 Date chiare e sintetiche motivazioni alla verità della seguente proposizione: "il segno della frazione $f=\frac{9-x^2+3x}{2+x^2}$ non è mai positivo e la frazione non ha zeri reali".

123 Stabilite se basta la condizione $x\ne 1\wedge x\ne -1$ per rendere positiva la frazione $f=\frac{x^3-1}{x^4-2x^2+1}$

124 Assegnate le due funzioni $f_1=\frac{x^2+1}{2x-x^2}$ e $f_2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}$ stabilite per quali valori della variabile indipendente si ha $f_1\ge f_2$.

R. $-1-\sqrt{2}\le x<0\vee -1+\sqrt{2}\le x<2$