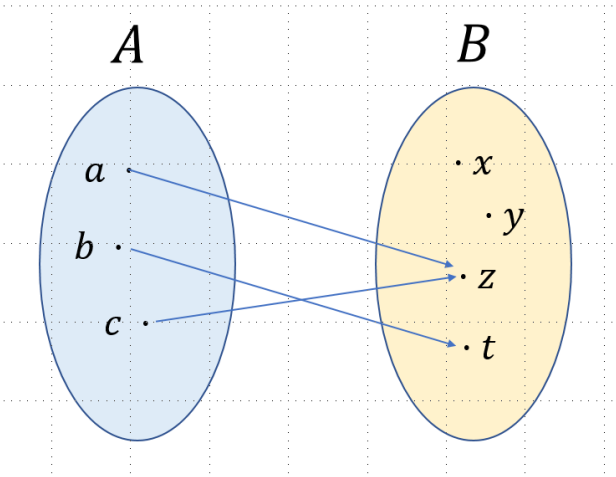
Le funzioni

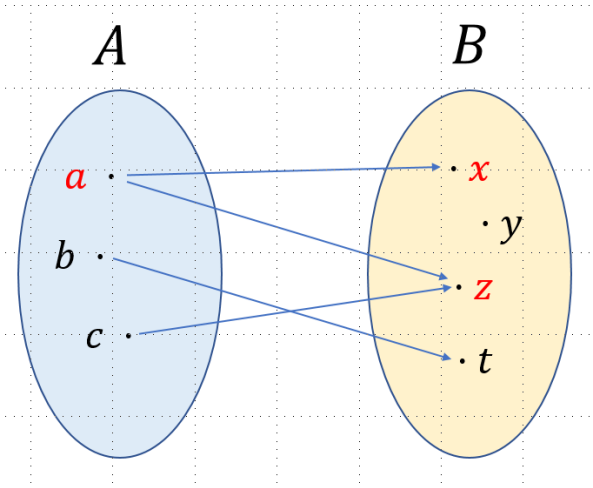
Una funzione è una particolare relazione. La relazione è un "legame" che associa agli elementi di un insieme, elementi di un altro insieme. Una relazione tra due insiemi si definisce FUNZIONE se ad ogni elemento $a \in A$ è associato uno ed un solo elemento $b \in B$.
L'elemento b si chiama **immagine** di a.
L'insieme A viene detto "**Dominio**" della funzione e l'insieme delle immagini (che non è detto coincida con l'insieme B) si chiama "**Codominio**".



In questo caso il Codominio è:

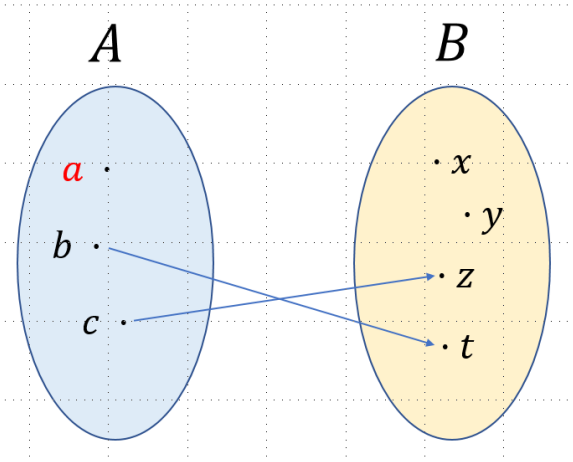
$$C = \{z,t\}$$

ATTENZIONE! Mentre due o più elementi di A possono avere la stessa immagine in B, non è vero il contrario. Cioè ad uno stesso elemento di A non possono corrispondere due o più elementi di B. Se questo accade la relazione in questione non è una funzione.
Questa a lato **non è una funzione** in quanto all'elemento a corrispondono due elementi di B. Nell'esempio sono x e z



<u>Questa non è una funzione</u>

Inoltre, affinché la relazione data sia una funzione, è necessario che tutti gli elementi di A, possiedano un'immagine in B
Questa a lato **non è una funzione** in quanto all'elemento a non è associato nessun elemento di B. In altre parole a non ha nessuna immagine in B



<u>Questa non è una funzione</u>

Le funzioni numeriche

Sono particolarmente importanti le funzioni numeriche. Come si può facilmente intuire, esse hanno come elementi dei numeri.
Spesso sono rappresentabili in un sistema di assi cartesiani attraverso espressioni di vario tipo: algebriche razionali e irrazionali, goniometriche, logaritmiche ed esponenziali.

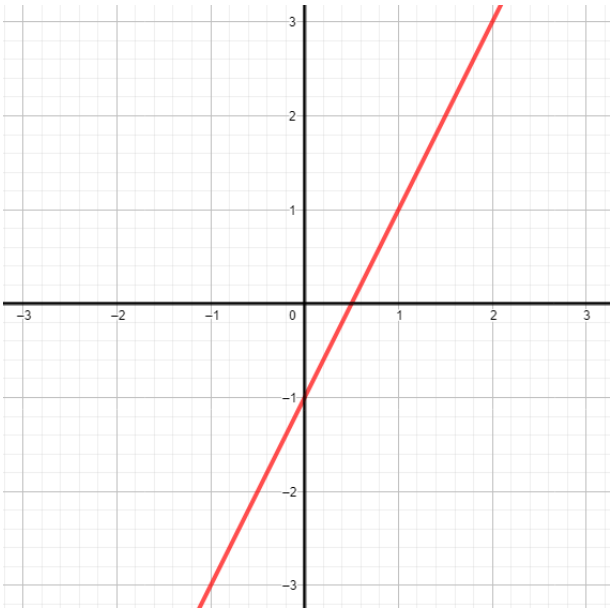
$$y = f(x)$$

x= viene detta "variabile indipendente"
y= viene detta "variabile dipendente" perché i suoi valori dipendono dai valori che assume la x

Questo tipo di funzioni, spesso, si rappresenta in un sistema di assi cartesiani. Nell'esempio a lato, per tracciare la funzione, è bastato dare dei valori a piacere alla variabile indipendente x e sostituirli nell'equazione della funzione per determinare i corrispondenti valori della variabile dipendente y. Il grafico è stato tracciato in base alla tabella qui sotto

x	y
0	−1
1	1
−1	−3

$$y=2x-1$$



DOMINIO DI UNA FUNZIONE

Il Dominio di una funzione è l'insieme dei valori reali di x in corrispondenza dei quali risulta reale anche la y.

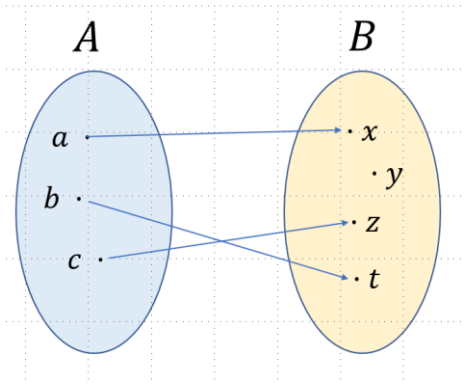
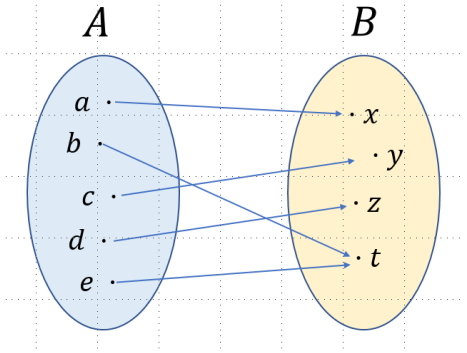
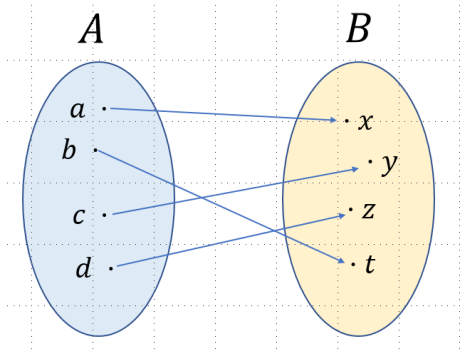
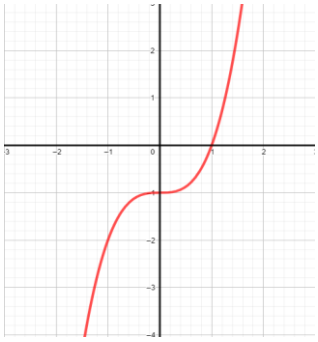
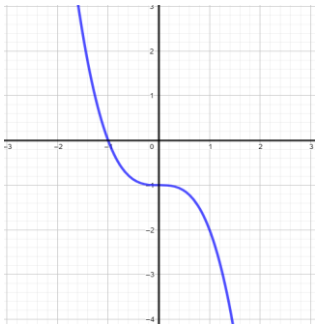
Data la funzione

$$y = \sqrt{3x+2}$$

Come si verifica facilmente x=−1 non appartiene al Dominio.
Infatti sostituendo −1 al posto della x si ottiene $y = \sqrt{-1}$ che è impossibile.
x=+2 invece appartiene al Dominio.
Infatti sostituendo 2 al posto della x si ottiene $y = \sqrt{8}$ che è un valore accettabile.
Più avanti sarà spiegato come si determina il Dominio di una funzione

Classificazione delle funzioni	
Funzione razionale intera	È definita da un polinomio $$y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$
Funzione razionale fratta	È definita dal rapporto di due polinomi $$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 7}{x + 9}$$
Funzione irrazionale intera	È definita da un'espressione contenente una radice e al suo interno una funzione (in questo caso si tratta di un polinomio) $$y = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$$
Funzione irrazionale fratta	È definita da un'espressione contenente una radice e al suo interno un rapporto tra funzioni (in questo caso, polinomi) $$y = \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - 7}{x + 9}}$$
Funzione trascendente	È definita da un'espressione contenente un logaritmo, una funzione esponenziale o una funzione goniometrica (vedi esempio qua sotto) $$y = \mathrm{sen}(4x - 3)$$
Funzione definita a tratti	È definita da espressioni analitiche diverse a seconda della parte di piano individuata dalla x $$y = \begin{cases} x^2 - 5x & \rightarrow \text{ per } x \geq 3 \\ -x^3 + 2 & \rightarrow \text{ per } x < 3 \end{cases}$$

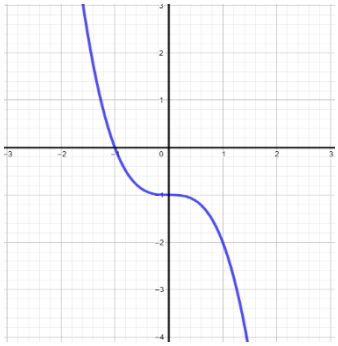
Altre definizioni	
Funzioni uguali	Due funzioni sono uguali se hanno lo stesso Dominio e se ad ogni valore di x del Dominio fanno corrispondere lo stesso valore y del Codominio
Zeri di una funzione (Relativi a funzioni rappresentate sul piano cartesiano)	Sono i punti in cui una funzione interseca l'asse x, cioè quelli che hanno y=0

Proprietà delle funzioni	
Funzione iniettiva Una funzione si dice iniettiva se ogni elemento $b \in B$ è immagine di un solo elemento $a \in A$ Come si vede dal grafico a lato, non ci sono due elementi di A che hanno stessa immagine in B. La funzione è quindi iniettiva	
Funzione suriettiva Una funzione si dice suriettiva se il suo Codominio coincide con B. In altre parole: una funzione è suriettiva, se tutti gli elementi di B sono immagine di almeno un elemento di A	
Funzione biiettiva o biunivoca Una funzione è biiettiva o biunivoca quando è contemporaneamente sia iniettiva che suriettiva Una funzione biunivoca è anche invertibile come si vedrà a breve	
Funzione crescente Sia data una funzione in x e y Si dice che una funzione è crescente se al crescere dei valori della variabile indipendente x, crescono anche i corrispondenti valori della variabile dipendente y	
Funzione decrescente Sia data una funzione in x e y. Si dice che una funzione è decrescente se al crescere dei valori della variabile indipendente x, decrescono i corrispondenti valori di y	

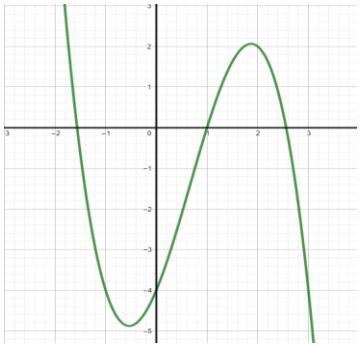
Segue “Proprietà delle funzioni”

Funzione monotòna

Una funzione si dice monotòna quando è solo crescente o solo decrescente in tutto il dominio. Nell’esempio a lato, la prima è sempre decrescente nel dominio, la seconda decresce, cresce e poi riprende a decrescere



Funzione monotòna



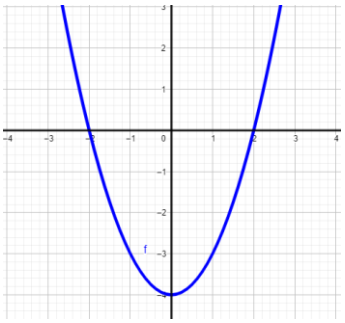
Funzione non monotòna

Funzione pari

Una funzione si dice pari se verifica la seguente uguaglianza:

$$f(-x) = f(x)$$

Una funzione di questo tipo viene detta anche **funzione simmetrica rispetto all’asse y**



Data la funzione $y = x^2 - 4$ è facile verificare che $f(-x) = f(x)$. Infatti mettendo $-x$ al posto della x, la funzione non cambia

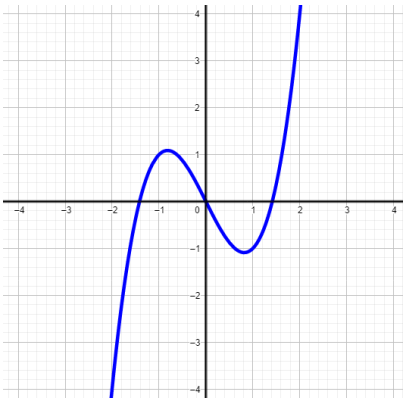
$$y_{(-x)} = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$$

Funzione dispari

Una funzione si dice dispari se verifica la seguente uguaglianza:

$$f(-x) = -f(x)$$

Una funzione di questo tipo viene detta anche **funzione simmetrica rispetto all’origine**



Data la funzione $y = x^3 - 2x$ è facile verificare che $f(-x) = -f(x)$. Infatti mettendo $-x$ al posto della x, la funzione cambia di segno

$$y_{(-x)} = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x)$$

Segue "Proprietà delle funzioni"

Funzione periodica

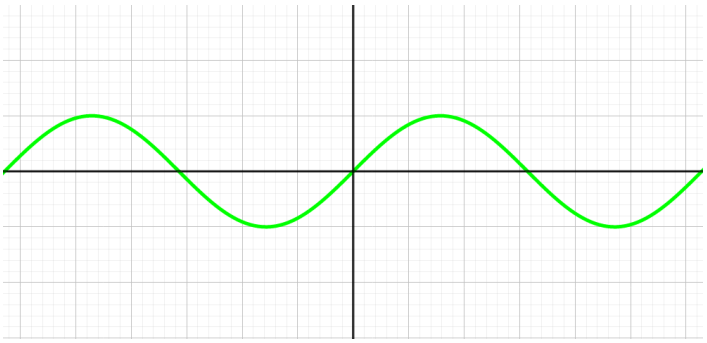
Una funzione si dice periodica se assume gli stessi valori dopo un determinato intervallo chiamato periodo. Algebricamente si può scrivere così:

$$f(x) = f(x + T)$$

Dove T è il periodo

Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni goniometriche

$$y = sen\, x$$



Funzione composta

La funzione composta, detta anche **funzione di funzione** associa ad un elemento $c \in C$ un elemento $a \in A$ nel modo seguente:

Ad a corrisponde b; $a \to b$

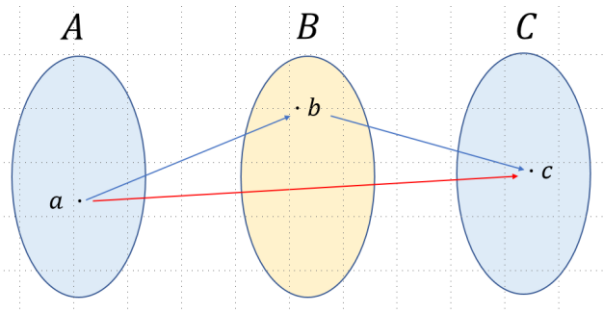
A b corrisponde c; $b \to c$

Quindi, attraverso la funzione composta

$$g \circ f$$

Ad a corrisponde c; $a \to c$

In altre parole, una funzione è composta laddove si "sovrappongono" due o più funzioni



Esempio:

$$y = \sqrt[3]{\log(x)}$$

È una funzione composta in quanto all'interno della radice non compare una semplice variabile indipendente (la x), ma un'altra funzione (in questo caso una funzione logaritmica). Ecco perché si usa anche definirla "funzione di funzione"

Funzione inversa

Se $f(x)$ è una funzione che associa ad ogni $x \in A$ una $y \in B$, la funzione inversa, ovvero $x = f^{-1}(y)$, associa una $x \in A$ ad ogni $y \in B$

$$y = f(x) = 3x \;\to\; x = f^{-1}(y) = \frac{x}{3}$$

Affinché una funzione sia invertibile, deve essere biunivoca, deve essere quindi sia iniettiva che suriettiva. Se non fosse iniettiva, invertendola, ad un elemento dell'insieme B corrisponderebbero più elementi dell'insieme A (quindi non sarebbe una funzione). Se non fosse suriettiva, non tutti gli elementi dell'insieme B avrebbero un'immagine in A e quindi, anche in questo caso, non sarebbe una funzione.