Statistica
Esercitazione XI

15 Dicembre 2022

Esercizio 1 In un certo paese il 70% delle persone ha i capelli biondi, il 20% rossi e il 10% mori. Inoltre, hanno gli occhi scuri il 10% dei biondi, il 25% dei rossi e il 50% dei mori.
Se una persona di quel paese mi riferisce al telefono che ha gli occhi scuri, qual è la probabilità che sia bionda?

Esercizio 2 Un test per la rilevazione della tubercolosi può dare esito positivo (+) o negativo (-). Sappiamo che: la probabilità di essere affetti dalla malattia è 0.2; la probabilità di risultare positivi dato che si è affetti dalla malattia è 0.85; la probabilità di risultare positivi dato che si è sani è 0.10.

1. Trovare la probabilità che un individuo risulti positivo al test.
2. Determinare la probabilità che un individuo sia affetto dalla malattia dato che è risultato positivo al test.
3. Estratti con reimmissione 10 individui dalla popolazione, determinare qual è la probabilità che almeno uno di essi sia malato.

Esercizio 3 Un test attitudinale con 10 domande a risposta dicotomica (sì/no) prevede il superamento se si forniscono almeno 8 risposte corrette.

1. Si descriva la variabile casuale "numero di risposte corrette su 10 domande".
2. Si calcoli la probabilità che, scegliendo a caso le risposte, un candidato totalmente impreparato superi l'esame.

Esercizio 4 Un'urna contiene 10 palline bianche e 40 rosse. Un esperimento consiste nell'estrazione di 5 palline. Si descriva la natura della variabile casuale "numero di palline bianche estratte tra le 5" e si calcoli la probabilità di ottenere almeno due palline bianche nelle seguenti ipotesi:

- estrazione con reimmissione;

- estrazione senza reimmissione.

Esercizio 5 Al seguente gioco è possibile partecipare pagando una posta di 2 euro: si lanciano due dadi e se la somma dei numeri ottenuti è almeno pari a nove si vincono 6 euro.

- Si stabilisca se il gioco è equo.
- Nell'ipotesi di ripetere il gioco 5 volte, si calcoli la probabilità di vincere almeno due volte.

Esercizio 6 Un macchinario presenta un tasso di difettosità del 6%.

- Scelti a caso 4 pezzi (con reimmissione) dal flusso produttivo, si calcoli la probabilità che nessuno sia difettoso.
- Nell'ipotesi in cui siano effettuate 60 estrazioni (con reimmissione), si calcoli la probabilità che vi sia almeno un pezzo difettoso.

ESERCIZIO 1

$P(B) = 0.7$, $P(R) = 0.2$, $P(M) = 0.1$

$P(S|B) = 0.1$, $P(S|R) = 0.25$, $P(S|M) = 0.5$

$$P(B|S) \overset{\text{TEOREMA DI BAYES}}{=} \frac{P(S|B)\,P(B)}{P(S)} = \frac{0.1 \cdot 0.7}{0.17} = \frac{0.07}{0.17} = 0.4118 = 41.18\%$$

$$\left[\begin{aligned} P(S) &= P(S|B) \cdot P(B) + P(S|R) \cdot P(R) + P(S|M)\,P(M) \\ &= 0.1 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.17 \end{aligned} \right]$$

ESERCIZIO 2

$P(\text{MALATO}) = 0.2$, $P(+ \mid \text{MALATO}) = 0.85$, $P(+ \mid \text{SANO}) = 0.1$

1. $$P(+) = P(+ \mid \text{MALATO}) \cdot P(\text{MALATO}) + P(+ \mid \text{SANI})\, P(\text{SANI})$$

$$= 0.85 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (1 - 0.2) = 0.25$$

2. $$P(\text{MALATO} \mid +) \overset{\text{TEOREMA DI BAYES}}{=} \frac{P(+ \mid \text{MALATO})\, P(\text{MALATO})}{P(+)} = \frac{0.85 \cdot 0.2}{0.25} = 0.68$$

3. $X =$ "n° DI INDIVIDUI MALATI SU 10 ESTRATTI CON REIMMISSIONE"

$$X \sim \text{Bin}\left(n = 10,\ p = P(\text{MALATO}) = 0.2\right)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \underbrace{0.2^0}_{=1} (1 - 0.2)^{10-0}$$

$$= 1 - 0.8^{10} = 0.8926 .$$

ESERCIZIO 3

X = "n° DI RISPOSTE CORRETTE SU 10 DOMANDE"

1. ASSUMENDO CHE OGNI RISPOSTA SIA INDIPENDENTE DALLE ALTRE, E CHE LA PROBABILITÀ DI RISPONDERE CORRETTAMENTE SIA LA STESSA PER OGNI DOMANDA,

$$X \sim Bin(n=10,\ p) \quad , \quad p = \text{PROB. DI RISPONDERE CORRETTAMENTE AD UNA DOMANDA}$$

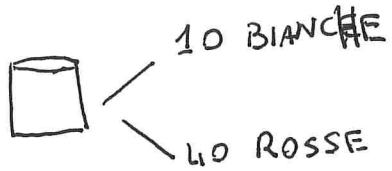
2. $p = 1/2 \Rightarrow X \sim Bin(10,\ 1/2)$

$$P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-8}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} + \binom{10}{9}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-9}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} + \binom{10}{10}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-10}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left[\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 56 = 0.0547$$

ESERCIZIO 4



X = "n° DI PALLINE BIANCHE ESTRATTE SU 5 ESTRAZIONI"

- CON REIMMISSIONE: AD OGNI ESTRAZIONE LA COMPOSIZIONE DELL'URNA È LA STESSA E, QUINDI, LE ESTRAZIONI SONO TRA LORO INDIPENDENTI E OGNI ESTRAZIONE È CARATTERIZZATA DALLA MEDESIMA PROBABILITÀ DI SUCCESSO.

$$X \sim Bin\left(n=5,\ p=\frac{10}{50}=0.2\right)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right]$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0} 0.2^0 (1-0.2)^5 + \binom{5}{1} 0.2^1 (1-0.2)^4\right]$$

$$= 1 - \left[0.8^5 + 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8^4\right] = 0.2627$$

- SENZA REIMMISSIONE: MODIFICHIAMO AD OGNI ESTRAZIONE LA COMPOSIZIONE DELL'URNA

$\Rightarrow$ ESTRAZIONI DIPENDENTI

$$X \sim \text{Ipergeom.}\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{n° TOTALE DI PALLINE}}}{N=50},\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{n° PALLINE FAVOREVOLI}}}{M=10},\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{n° DI ESTRAZIONI}}}{n=5}\right)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right] = 1 - \left[0.3106 + 0.4313\right]$$

$$= 0.2581$$

$$\left[\begin{array}{l} P(X=0) = \dfrac{\binom{10}{0}\binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.3106 \\[2ex] P(X=1) = \dfrac{\binom{10}{1}\binom{40}{4}}{\binom{50}{5}} = 0.4313 \end{array}\right]$$

ESERCIZIO 5

X = "SOMMA DEI RISULTATI NEL LANCIO DI DUE DADI"; X_1 = RISULTATO 1° DADO; X_2 = RISULTATO 2° DADO

- $P(\text{VINCERE}) = P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = 0.2778$$

$$\left[P(X=9) = P(X_1=3, X_2=6) + P(X_1=4, X_2=5) + P(X_1=5, X_2=4) + P(X_1=6, X_2=3) \right]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{4}{36}$$

$$\left[P(X=10) = 3/36 \; ; \; P(X=11) = 2/36 \; ; \; P(X=12) = 1/36 \right]$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{GUADAGNO NETTO}}}{G} = \begin{cases} 6-2=4, & p = 0.2778 \\ -2, & 1-p = 0.7222 \end{cases} ; \quad M(G) = 4\cdot 0.2778 + (-2)\cdot 0.7222 = -0.3333 < 0$$

IL GIOCO NON È EQUO POICHÉ $M(G) \neq 0$; INOLTRE DATO CHE $M(G) < 0$ IL GIOCO È FAVOREVOLE AL BANCO

- Y = "N° DI VITTORIE RIPETENDO L'ESPERIMENTO 5 VOLTE"

$$Y \sim Bin(n=5,\ p=0.2778)$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y<2) = 1 - \left(P(Y=0) + P(Y=1) \right)$$

$$= 1 - \left((1-0.2778)^5 + \binom{5}{1} 0.2778^1 (1-0.2778)^{5-1} \right)$$

$$= 1 - \left(0.7222^5 + 5 \cdot 0.2778 \cdot 0.7222^4 \right) = 0.4256$$

ESERCIZIO 6

1. X = "n° DI PEZZI DIFETTOSI SU 4 ESTRATTI CON REIMMISSIONE"

$$X \sim Bin(n=4;\ p=0.06)$$

$$P(X=0) = \underbrace{\binom{4}{0}}_{=1} \underbrace{0.06^0}_{=1} (1-0.06)^{4-0} = 0.94^4 = 0.7807$$

2. Y = "n° DI PEZZI DIFETTOSI SU 60 ESTRATTI CON REIMMISSIONE"

$$Y \sim Bin(n=60;\ p=0.06)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0.94^{60} = 0.9756$$

ESER. 6 DELLA ESERCITAZIONE IX

1. a = VERA, POICHÉ $Var(X \mid Y=10) = 0$

b = FALSA, POICHÉ PER $Y=20$, $X \in \{1, 4\}$

c = VERA, $M(X \mid Y=10) = 2$; $M(X \mid Y=20) = \frac{1 \cdot 12 + 4 \cdot 6}{18} = \frac{36}{18} = 2$

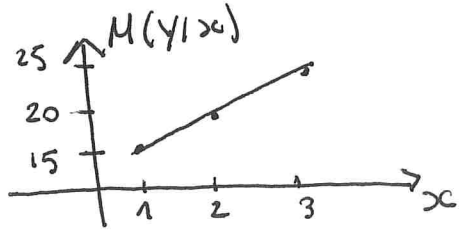
$M(X \mid Y=30) = 2 \Rightarrow \eta^2_{X \mid Y} = 0$; INOLTRE $0 \le \rho^2 \le \eta^2_{X \mid Y}$

$\Rightarrow \rho^2 = 0$

2. a = VERA, $M(Y \mid X=1) = 15$; $M(Y \mid X=2) = 20$; $M(Y \mid X=3) = 25$

b = FALSO, NON VI È DIP. FUNZ. DI Y DA X ($\Rightarrow \eta^2_{Y \mid X} < 1$) E NON VI È DIP. FUNZ. DI X DA Y ($\Rightarrow \eta^2_{X \mid Y} < 1$). QUINDI, POICHÉ $\rho^2 \le \eta^2 \Rightarrow \rho^2 < 1 \Rightarrow$ NON VI È PERFETTA DIP. LINEARE TRA X E Y.

c = VERA, $\eta^2_{Y \mid X} = \rho^2$ SE LE $M(Y \mid X)$ SONO ALLINEATE



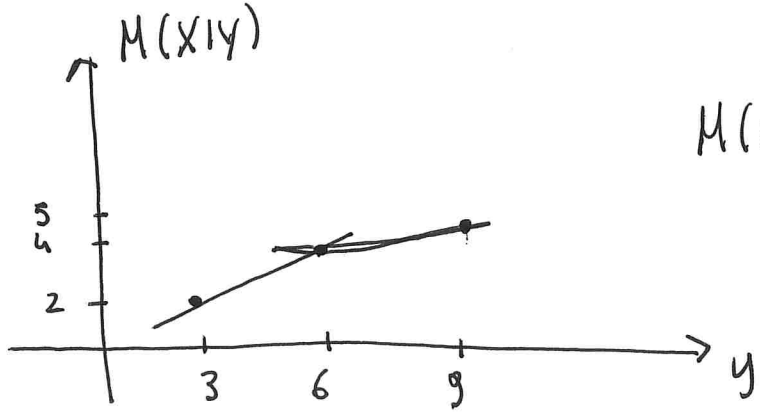
INOLTRE, ESSENDO $M(Y \mid X)$ DIVERSE, $\eta^2_{Y \mid X} \neq 0$.

3. a = VERA , $M(Y|X=2)=3$; $M(Y|X=4)=7.5$, $M(Y|X=6)=9$

b = FALSA, POICHÉ PER $Y=9$, $X=\{4,6\}$.

c = VERA , $\rho^2 < \eta^2_{X|Y}$ SE $M(X|Y)$ NON SONO ALLINEATE.

$M(X|Y=3)=2$; $M(X|Y=6)=4$, $M(X|Y=9)=5$



$M(X|Y)$ NON SONO ALLINEATE