Principio di induzione completa - esercizio svolto

31 luglio 2023

Esercizio 0.1. Siano

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \text{ per ogni } n \geq 2$$

Provare che

$$\text{Per ogni } n \geq 0 \qquad a_n = \frac{4}{7}6^n + \frac{3}{7}(-1)^n$$

Svolgimento. Usiamo l'induzione completa. Per $n = 0$ si ha $a_0 = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$ e quindi la proprietà è dimostrata. Supponiamo che la proprietà sia vera per $1, 2, \ldots, (n-1)$. Dimostriamo che la proprietà vale anche per n.

$$\begin{aligned}
a_n &= 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \\
&= 5(\frac{4}{7}6^{n-1} + \frac{3}{7}(-1)^{n-1}) + 6(\frac{4}{7}6^{n-2} + \frac{3}{7}(-1)^{n-2}) \\
&= \frac{20}{7}6^{n-1} + \frac{15}{7}(-1)^{n-1} + \frac{4}{7}6^{n-1} + \frac{18}{7}(-1)^{n-2} \\
&= \frac{24}{7}6^{n-1} + (-1)^{n-2}(-\frac{15}{7} + \frac{18}{7}) \\
&= \frac{4}{7}6^n + (-1)^n\frac{3}{7}
\end{aligned}$$

In questo esercizio, per dimostrare che la proprietà valeva per n:

1. abbiamo scritto a_n in funzione di a_{n-1} e a_{n-2} usando la definizione
2. abbiamo sostituito ad a_{n-1} e a_{n-2} l'ipotesi induttiva
3. abbiamo raccolto il 6^{n-1} e il $(-1)^{n-2}$ (questo per cercare di ottenere un risultato simile a quello della tesi)
4. abbiamo sommato il sommabile e l'esercizio è concluso (Nota:

$$(-1)^n = (-1)^{n-2}(-1)^2 = (-1)^{n-2}$$

□