Applicazione della trigonometria alla geometria del triangolo isoscele (Note a cura di Falanga Giuseppe)

Testo del problema

Nel triangolo ABC, *isoscele sulla base* $\overline{AB}$, *si ha che* $\cos(C\hat{A}B)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Determinare* $\cos(A\hat{C}B)$.

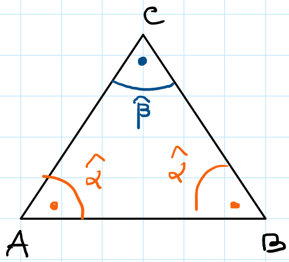
Dati

1. *ABC isoscele*
2. $\cos(C\hat{A}B)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Tesi

$\cos(\widehat{ACB})$

Svolgimento



- *Dato che ABC è isoscele su base* $\overline{AB}$, *allora gli angoli adiacenti a tale base saranno congruenti, ossia* $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.
- *Indichiamo con la lettera* α i due angoli alla base e con la lettera β l'angolo al vertice.
- Per ogni triangolo piano Euclideo la somma degli angoli interni è pari a 180°, quindi possiamo scrivere la seguente equazione che coinvolge gli angoli interni del triangolo ABC: $\boldsymbol{\alpha+\alpha+\beta=\beta+2\alpha=180°}$.
- Quanto detto al punto precedente permette subito di inferire che $\beta = 180° - 2\alpha$
- La soluzione del problema, quindi, consiste nel calcolare $\cos(\beta) = \cos(180° - 2\alpha)$
- Dalla teoria sugli archi associati è noto che, in via del tutto generale , $\cos(180° - angolo) = -\cos(angolo)$
- Applicando la teoria sugli archi associati al nostro caso specifico troviamo subito che $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos(2\alpha)$
- Dalle **formule di duplicazione del coseno** segue immediatamente che $\boldsymbol{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha)}$
- Quindi $\cos(\beta) = -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
- Per poter giungere al risultato richiesto è necessario stimare il valore del seno di alfa, il che è facilmente ottenibile adoperando la prima identità fondamentale della trigonometria
  $\boldsymbol{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \rightarrow sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \pm\sqrt{\mathbf{1}-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *, avendo scelto la radice positiva in quanto alfa,* per costruzione, risulta essere sicuramente un angolo minore di 90° (quindi ammette seno positivo).
- $\boldsymbol{\cos(\beta) = -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}}$ (***risultato richiesto***).