Si consideri la seguente funzione di utilità:

$$U = \alpha xy + 8y$$

a) **Che valore dovrebbe assumere il parametro α affinché i panieri A=(4,3) e B=(1,7) siano considerati indifferenti dal consumatore?**

Due panieri sono giudicati indifferenti se danno al consumatore lo stesso livello di utilità.
Bisogna prima di tutto prendere le coordinate di A=(4,3) e sostituire i valori nella funzione di utilità $U = \alpha xy + 8y$. Avremo quindi per A:

$$U = \alpha xy + 8y$$
$$U = \alpha \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 3$$

Stessa cosa faremo per il paniere B=(1,7):

$$U = \alpha xy + 8y$$
$$U = \alpha \cdot 1 \cdot 7 + 8 \cdot 7$$

Per trovare quindi il valore del paramento α per cui i panieri A e B sono considerati indifferenti, sappiamo che per esserlo devono dare al consumatore lo stesso livello di utilità, dunque eguagliamo le due funzioni di utilità:

$$\alpha \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = \alpha \cdot 1 \cdot 7 + 8 \cdot 7$$
$$12\alpha + 24 = 7\alpha + 56$$
$$12\alpha + 24 - 24 - 7\alpha = 7\alpha + 56 - 24 - 7\alpha$$
$$12\alpha - 7\alpha = +56 - 24$$
$$5\alpha = 32$$
$$\frac{5\alpha}{5} = \frac{32}{5}$$
$$\alpha = \frac{32}{5}$$

b) **Determinare il livello di utilità associato al paniere $A = (4,3)$ se $\alpha = 4$ e, per questo livello di utilità, derivare la funzione della generica curva di indifferenza**.

Semplicemente sostituiamo i valori nel testo nella nostra funzione di utilità $U = \alpha xy + 8y$:
Quindi con A=(4,3) e $\alpha = 4$ avremo:

$$U_A = 4 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 72$$

Per trovare la funzione generica della curva di indifferenza dobbiamo risolvere per y, dunque dovremo mantenere le nostre incognite x e y. Avremo allora, sapendo che la funzione di utilità è $U = \alpha xy + 8y$, $\alpha = 4$ e che il livello di utilità associato al paniere A è 72:

$$72 = 4xy + 8y$$
$$72 = 4xy + 8y$$
$$72 = y(4x + 8)$$
$$\frac{72}{4x + 8} = y$$
$$y = \frac{18}{x + 2}$$

c) **Calcolare il paniere di scelta ottima del consumatore quando $\alpha = 4$, il reddito è $R = 80$ ed i prezzi dei due beni sono $p_x = 5$ e $p_y = 8$.**

Per trovare la scelta ottima sappiamo che dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -SMS = -\frac{p_x}{p_y} \\ R = xp_x + yp_y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{UM_x}{UM_y} = -\frac{p_x}{p_y} \\ R = xp_x + yp_y \end{cases}$$

La nostra funzione di utilità sapendo che $\alpha = 4$ è:

$$U = 4xy + 8y$$

Troviamo ora il SMS ($SMS = \frac{UM_x}{UM_y}$):

$$UM_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 4y$$

$$UM_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 4x + 8$$

$$SMS = \frac{UM_x}{UM_y} = \frac{4y}{4x+8} = \frac{y}{x+2}$$

Il nostro vincolo di bilancio, sapendo che $R = 80$, $p_x = 5$ e $p_y = 8$ è:

$$R = xp_x + yp_y$$

$$80 = 5x + 8y$$

E la sua pendenza è:

$$-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{5}{8}$$

Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{y}{x+2} = -\frac{5}{8} \\ 80 = 5x + 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x+2} = \frac{5}{8} \\ 80 = 5x + 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}(x+2) \\ 80 = 5x + 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{10}{8} \\ 80 = 5x + 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{4} \\ 80 = 5x + 8y \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione $y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{4}$ e la sostituiamo nella seconda per trovare x:

$$80 = 5x + 8(\frac{5}{8}x + \frac{5}{4})$$

$$80 = 5x + 5x + 10$$

$$80 - 10 = 10x$$

$$70 = 10x$$

$$\frac{70}{10} = \frac{10x}{10}$$

$$x = 7$$

Ora che abbiamo trovato la quantità ottima di x, possiamo sostituirla nell'equazione $y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{4}$:

$$y = \frac{5}{8}(7) + \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{35}{8} + \frac{5}{4}$$
$$y = \frac{35 + 10}{8}$$
$$y = \frac{45}{8}$$

Il paniere ottimo è composto da:

$$\begin{cases} y^* = \frac{45}{8} \\ x^* = 7 \end{cases}$$

d) **Qual è la percentuale del proprio reddito che il consumatore spende nel bene x?**

La spesa in x, sapendo che $x^* = 7$ e che $p_x = 5$ è:

$$S = x^* \cdot p_x = 7 \cdot 5 = 35$$

Per calcolare la percentuale semplicemente calcoliamo la spesa in x sul reddito totale:

$$\frac{S}{R} = \frac{35}{80} = 0{,}4375 \quad \rightarrow \quad 43{,}75\%$$

e) **Calcolare l'elasticità della domanda del bene x rispetto al reddito quando $R = 100$, $x = 8$ e i prezzi dei due beni sono gli stessi del punto c) $p_x = 5$ e $p_y = 8$. Stabilire infine se il bene x è un bene inferiore o normale.**

L'esercizio ci chiede di trovare l'elasticità della domanda del bene x rispetto al reddito. Per fare ciò la prima cosa da fare è trovare la curva di domanda del bene x in funzione del reddito. Riprendiamo dunque il nostro solito sistema, mantenendo fisso in questo caso il reddito:

$$\begin{cases} -SMS = -\frac{p_x}{p_y} \\ R = xp_x + yp_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} -\frac{UM_x}{UM_y} = -\frac{p_x}{p_y} \\ R = xp_x + yp_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{UM_x}{UM_y} = \frac{p_x}{p_y} \\ R = xp_x + yp_y \end{cases}$$

Dal punto c) sappiamo che il nostro SMS è $\frac{y}{x+2}$. I prezzi sono $p_x = 5$ e $p_y = 8$. Avremo dunque:

$$\begin{cases} \frac{y}{x+2} = \frac{5}{8} \\ R = 5x + 8y \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}(x+2) \\ R = 5x + 8y \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{10}{8} \\ R = 5x + 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{4} \\ R = 5x + 8y \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione $y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{2}$ e la sostituiamo nella seconda, e risolviamo per x:

$$R = 5x + 8(\frac{5}{8}x + \frac{5}{4})$$

$$R = 5x + 5x + 10$$
$$R = 10x + 10$$
$$R - 10x - R = 10x + 10 - 10x - R$$
$$-10x = +10 - R$$
$$\frac{10x}{10} = \frac{-10 + R}{10}$$
$$x = -\frac{10}{10} + \frac{R}{10}$$
$$x = \frac{R}{10} - 1$$

La formula dell'elasticità della domanda al reddito è:

$$\varepsilon_R = \frac{\partial x}{\partial R} \cdot \frac{R}{x}$$

Dove quindi $\frac{\partial x}{\partial R} = \frac{\partial\left(\frac{R}{10} - 2\right)}{\partial R} = \frac{1}{10}$

Avremo dunque, sapendo dal testo che R=100 e x=8:

$$\varepsilon_R = \frac{\partial x}{\partial R} \cdot \frac{R}{x} = \frac{1}{10} \cdot \frac{100}{8} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$$

Nota Importante:
La domanda posta in questo punto richiede di identificare l'elasticità della domanda del bene x rispetto al reddito quando R=100 e x=8, pertanto stiamo parlando di ***elasticità intorno ad un punto***, ovvero per variazioni infinitesimali del reddito.

Dato che $\varepsilon_R > 0$ si tratta di un bene normale.

Il segno di $\varepsilon_{Q,I}$ puo' essere positivo o negativo

Beni normali: quando aumenta il reddito, aumenta la loro domanda ($\varepsilon_{Q,I} > 0$)

- **Beni inferiori**: quando aumenta il reddito, diminuisce la loro domanda ($\varepsilon_{Q,I} < 0$)