ESERCIZI SVOLTI DI RIEPILOGO SU EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

ALCUNI CONCETTI DI BASE SU EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

EQUAZIONI IRRAZIONALI

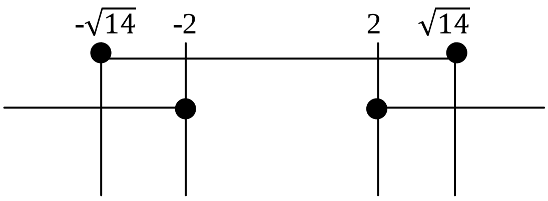
- Una equazione si definisce irrazionale quando in essa compaiono uno o più radicali <u>contenenti l' incognita.</u>
- La condizione di esistenza del radicale quadratico (ma più in generale di indice pari) $\sqrt{f(x)}$ è $f(x) \geq 0$
- In caso di radicale quadratico (ma più in generale di indice pari) occorre verificare la concordanza di segno tra i due membri dell' equazione tutte le volte che si elevano al quadrato entrambi i membri dell' equazione, ossia anche il membro non sotto radice deve essere posto maggiore o uguale a zero.
- Per equazioni irrazionali cubiche (o di indici dispari) non si pone alcuna condizione sul radicale e basta elevare al cubo ambo i membri dell' equazione.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

- Una disequazione si definisce irrazionale quando in essa compaiono uno o più radicali <u>contenenti l' incognita</u>. Qui ci si limiterà a radicali quadratici e cubici.
  Per prima cosa parliamo di equazioni irrazionali con incognita sotto radice QUADRATA.
- Risolvere $\sqrt{f(x)} < g(x)$ equivale a risolvere il sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$
- Risolvere $\sqrt{f(x)} > g(x)$ equivale a risolvere l' unione nell' insieme delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$
- Per disequazioni irrazionali cubiche (o di indice dispari) non si pone alcuna condizione sul radicale e basta elevare al cubo (o per l' indice dispari) ambo i membri della disequazione.

ESERCIZIO N°1

Si voglia risolvere l' equazione irrazionale $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{14-x^2}$. Le condizioni di esistenza del radicale sono soddisfatte dal seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ 14-x^2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq -2 \vee x\geq 2 \\ -\sqrt{14}\leq x\leq \sqrt{14} \end{cases}$, ossia per i valori $-\sqrt{14}\leq x\leq -2 \vee 2\leq x\leq \sqrt{14}$, come si può intuire dal grafico sottostante.



Elevando al quadrato ambo i membri otteniamo $x^2-4=14-x^2$ che diventa $2x^2=18$, $x^2=9$ e quindi $x=\pm 3$.

ESERCIZIO N°2

Si risolva $\sqrt{4-3x}=-2$ Il secondo membro è negativo, per cui non rispetterà mai la condizione di concordanza di segno: non serve nemmeno risolvere l' equazione perché non avrà in alcun caso soluzioni accettabile. L' equazione proposta è impossibile.

ESERCIZIO N°3

Risolvere l' equazione irrazionale $x+\sqrt{1+x}=11$

Questa equazione è equivalente a $\sqrt{1+x}=11-x$

La condizione di esistenza del radicale al primo membro è: $1+x\geq 0 \longrightarrow x\geq -1$.

Per questi valori di x il primo membro è positivo o nullo, per cui occorre richiedere che anche il secondo membro sia positivo oppure nullo (condizione di concordanza di segno), che sarà:

$11-x\geq 0 \longrightarrow x\leq 11$

Le condizioni di accettabilità delle soluzioni, perciò, saranno date dal simultaneo verificarsi delle condizioni di cui sopra, per cui si risolverà il sistema di disequazioni:
$\begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 11 \end{cases}$ le cui soluzioni sono: $-1\leq x\leq 11$, che rappresenta il campo di accettabilità delle soluzioni dell' equazione.
Elevando al quadrato primo e secondo membro dell' equazione, otteniamo:

$1+x=121+x^2-22x$ ovvero $x^2-23x+120=0$.
Ora si applica la formula per determinare le soluzioni delle equazioni di secondo grado (a, b, c coefficienti dell' equazione rispettivamente di secondo grado, primo grado, termine noto):

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{2}=\frac{23\pm 7}{2}$$

che fornisce $x_1=15, x_2=8$.

Ne consegue che $x_1 = 15$ non è accettabile dato che è esterno al campo di accettabilità delle soluzioni.

$x_2 = 8$ è la sola soluzione accettabile dell' equazione.

ESERCIZIO N°4

Sia da risolvere l' equazione: $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}$

Per prima cosa vediamo le condizioni di accettabilità di entrambi i membri dell' equazione che saranno $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x-1} \\ \frac{4x+1}{2} \geq 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ \text{verificata } \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$, in sostanza il sistema sarà verificato per $x \geq 1$

Per risolvere l' equazione razionalizziamo il denominatore del primo membro in questo modo:

$\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \frac{4x-1}{2}$ che sarà poi possibile scrivere come:

$\frac{x+1+x-1+2\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1-(x-1)} = \frac{4x-1}{2}$ e quindi $\frac{2x+2\sqrt{(x-1)(x+1)}}{2} = \frac{4x-1}{2}$

Svolgendo i calcoli, si ottiene $2\sqrt{(x-1)(x+1)} = 2x-1 \quad \sqrt{(x-1)(x+1)} = x - \frac{1}{2}$

Il secondo membro esiste per $x \geq \frac{1}{2}$ che non modifica, in questo caso, le condizioni di esistenza originarie $x \geq 1$ (basta mettere a sistema le due condizioni: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$ per cui il campo di accettabilità delle soluzioni sarà $x \geq 1$. Elevando poi al quadrato ambo i membri si ottiene

$x^2 - 1 = x^2 + \frac{1}{4} - x$ e quindi $x = \frac{5}{4}$ che è accettabile in quanto maggiore di 1.

ESERCIZIO N°5

Si voglia risolvere l' equazione irrazionale: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}$

Le condizioni di accettabilità saranno date dal sistema $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 0 \\ x \geq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$ verificato per $x \geq 4$

Eleviamo quindi al quadrato, ottenendo

$$x + 5 + x - 2\sqrt{x(x+5)} = x - 3 + x - 4 + 2\sqrt{(x-3)(x-4)}$$

che in conclusione, fornisce $2\sqrt{(x-3)(x-4)} + 2\sqrt{x(x+5)} = 12$, nonché

$\sqrt{(x-3)(x-4)} + \sqrt{x(x+5)} = 6$

Eleviamo nuovamente al quadrato entrambi i membri, ottenendo:

$$(x-3)(x-4)+\ x(x+5)+2\sqrt{(x-3)(x-4)x(x+5)}=36$$

$$x^2-7x+12+x^2+5x+2\sqrt{(x-3)(x-4)x(x+5)}=36$$

$$2\sqrt{(x-3)(x-4)x(x+5)}=24-2x^2+2x$$

$$\sqrt{(x-3)(x-4)x(x+5)}=-x^2+x+12$$

Prima di elevare nuovamente a potenza, a questo punto si impone la condizione di concordanza di segno per il secondo membro: $-x^2+x+12\geq 0$

Risolviamo quindi l' equazione di secondo grado associata, e quindi la disequazione, che essendo il coefficiente del termine di secondo grado negativo, sarà verificata per valori interni all' intervallo delle radici.
$x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-1\pm7}{2}$ $x_1=\frac{-1+7}{-2}=-3$ $x_2=\frac{-1-7}{-2}=4$

Per cui per $-3\leq x\leq 4$ il secondo termine sarà positivo e le soluzioni saranno accettabili.
Messa a sistema questa condizione con quella iniziale, ossia $\begin{cases} x\geq 4 \\ -3\leq x\leq 4\end{cases}$ si vede che la sola soluzione accettabile sarà $x=4$

Eleviamo al quadrato i due membri dell' equazione si ottiene:

$$(x^2+5x)(x^2-7x+12)=x^4+x^2+144-2x^3+24x-24x^2$$

$$x^4-7x^3+12x^2+5x^3-35x^2+60x=x^4-2x^3-23x^2+24x+144$$

per cui, semplificando, si ottiene $x=4$ che è soluzione accettabile dell' equazione.

<u>ESERCIZIO N°6</u>

Si risolva l' equazione $\sqrt[3]{x^2-3x}=-\sqrt[3]{x}$

Qui non c'è alcuna condizione di esistenza da porre, avendo radicali di indice dispari.
Basterà quindi elevare al cubo ambo i membri, ricordando che l' elevamento a potenza dispari conserva il segno iniziale.
Si avrà, quindi,

$x^2-3x=-x$ ossia $x^2-2x=0$ semplice equazione spuria scomponibile in $x(x-2)=0$
per cui le soluzioni dell' equazione saranno semplicemente $x=0$ e $x=2$

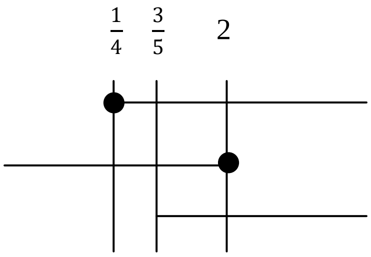
ESERCIZIO N°7

Sia assegnata la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{4x-1} > \sqrt{-x+2}$

Si procede risolvendo il sistema di disequazioni $\begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ -x+2 \geq 0 \\ 4x-1 > -x+2 \end{cases}$.

Le prime due equazioni del sistema rappresentano le condizioni per cui i radicali esistono, per cui si può elevare al quadrato. Svolgendo i semplici calcoli si ottiene

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 2 \\ x > \frac{3}{5} \end{cases}$$



Le soluzioni comuni delle tre disequazioni, e quindi della disequazione irrazionale, sono $\frac{3}{5} < x \leq 2$

ESERCIZIO N°8

Risolvere la disequazione irrazionale $x - \sqrt{25-x^2} > 1$

Possiamo scrivere che $x - 1 > \sqrt{25-x^2}$, e quindi $\sqrt{25-x^2} < x - 1$

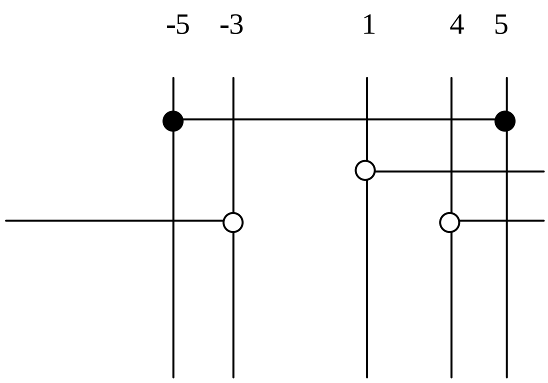
Si risolverà pertanto il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ 25-x^2 < x^2+1-2x \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ -2x^2+2x+24 < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $-5 \leq x \leq 5$, la seconda per $x > 1$, nella terza si risolve prima l' equazione associata e, vedendo che $a < 0$, $\Delta > 0$ si risolve l' equazione associata alla disequazione che ha radici -3 e 4. Il trinomio sarà negativo per i valori esterni all' intervallo $(-3,4)$ e positivo per valori interni.

Perciò la terza disequazione è risolta per $-3 < x < 4$. In conclusione il sistema diventa: $\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x > 1 \\ -3 < x < 4 \end{cases}$

Vediamo graficamente le soluzioni comuni alle tre disequazioni (le linee rappresentano le soluzioni, "pallino nero" da comprendere, "pallino bianco" da escludere):



Si intuisce che le soluzioni del sistema di disequazioni, e quindi della disequazione irrazionale proposta, sono perciò nell' intervallo $4 < x \leq 5$

ESERCIZIO N°9

Si voglia risolvere la disequazione $\mathrm{x} + \sqrt{25 + \mathrm{x}^2} > 1$

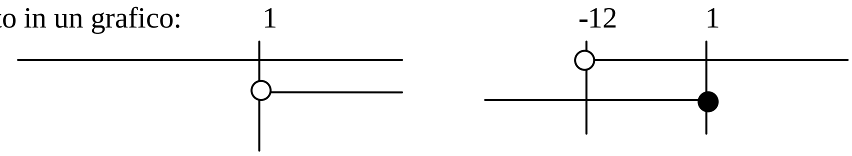
Essa può essere scritta come $\sqrt{25 + \mathrm{x}^2} > 1 - \mathrm{x}$. Per risolvere la disequazione proposta occorrerà UNIRE le soluzioni dei due sistemi di disequazioni seguenti:

$$\begin{cases} 25 + \mathrm{x}^2 \geq 0 \\ 1 - \mathrm{x} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - \mathrm{x} \geq 0 \\ 25 + \mathrm{x}^2 > 1 + \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} \end{cases}$$

Nel primo sistema la prima disequazione è sempre verificata, mentre la seconda è verificata per $\mathrm{x} > 1$, pertanto il sistema è risolto per $\mathrm{x} > 1$. Sviluppando i calcoli del secondo sistema, si ottiene

$$\begin{cases} \mathrm{x} \leq 1 \\ 2\mathrm{x} > -24 \longrightarrow \mathrm{x} > -12 \end{cases}$$ Per cui le soluzioni del secondo sistema sono $-12 < x \leq 1$

Riassumiamo quanto visto in un grafico:



Pertanto, le soluzioni della disequazione, essendo quelle dell' unione dei due sistemi di disequazioni, saranno l' unione di quelle dei due sistemi e quindi $\mathrm{x} > 12$

ESERCIZIO N°10

Si voglia risolvere la disequazione $\sqrt[3]{\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}} + \sqrt[3]{2 - \mathrm{x}} > 0$

Si risolve spostando la radice al secondo membro ed elevando ambo i membri al cubo. Non servono condizioni di esistenza sulla radice di esponente dispari. Quindi: $\sqrt[3]{\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}} > -\sqrt[3]{2 - \mathrm{x}}$

Ed elevando entrambi i membri al cubo: $\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x} > -(2 - \mathrm{x})$ che in definitiva diventerà $\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x} + 2 > 0$

Il polinomio di terzo grado è scomponibile mediante la Regola di Ruffini. Sostituendo 1 si nota che il polinomio si annulla, per è scomponibile per $\mathrm{x} - 1$ e applicando la divisione dei polinomi si ottiene la disequazione $(\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 2) > 0$
Studiando il segno dei singoli fattori si ottiene:

$\mathrm{x} - 1 > 0$ se $\mathrm{x} > 1$ $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 2) > 0$ se $\mathrm{x} < -2 \vee x > 1$

		-2		1	
fatt.x-1	-		-		+
fatt. $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 2)$	+		-		+
complessivo	-		+		+

La disequazione risulta quindi verificata per $\mathrm{x} > -1 \wedge x \neq 2$