Argomento 12
Matrici

12.1 Vettori di $\mathbb{R}^n$ e operazioni

▶ **Vettore** di $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1\ldots n} = (x_i)_{i=1}^n$, con $x_i \in \mathbb{R}$ **componenti** di $\mathbf{x}$.

▶ $\mathbb{R}^n$= spazio dei vettori reali a n componenti = spazio vettoriale reale n-dimensionale.

▶ **Somma di due vettori in** $\mathbb{R}^n$. Dati $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$ e $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$, la loro somma è il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti la somma delle componenti, ossia $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i)_{i=1}^n$.

▶ **Prodotto di un vettore per uno scalare**. Dato $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, il prodotto di a per $\mathbf{x}$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti il prodotto per a delle componenti, ossia $a\mathbf{x} = (ax_i)_{i=1}^n$.

▶ **Prodotto scalare di due vettori**. Dati $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$ e $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$, il prodotto scalare è il numero reale ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe, ossia $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)$.

NOTA Le componenti x_i di un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ si possono allineare in una riga oppure in una colonna.

Esempio 12.1 Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ (con le componenti allineate in colonna)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{calcoliamo}$$

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \\ 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 - 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot (-1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$ (con le componenti allineate in riga)

$$\mathbf{x} = (3, 2, \pi, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (0, -1, 1, 2)\,, \qquad \text{calcoliamo}$$

$$2\mathbf{y} - \mathbf{x} = (-3, -4, 2 - \pi, 4) \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = -\,2 + \pi.$$

12.2 Matrici e operazioni

▶ **Matrice**. Una tabella di $m \times n$ numeri reali disposti in m righe ed in n colonne del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$$

si chiama **matrice di m righe ed n colonne**, (matrice di tipo (m, n) o $m \times n$). Ogni elemento a_{ij} ha un indice di riga i e un indice di colonna j, che indicano la riga e la colonna di A in cui si trova.

► *Matrici particolari.*

◇ Una matrice di tipo $(n,1)$ formata da n righe ed una sola colonna è un **vettore colonna**, cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono allineate in colonna.

◇ Una matrice di tipo $(1,n)$ formata da una sola riga e n colonne è un **vettore riga**, cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono allineate in riga.

◇ Una matrice si dice **quadrata** (**di ordine** n) se $m = n$.

◇ Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore (inferiore)** se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ (per $i < j$), cioè se sono nulli gli elementi posti al di sotto (al di sopra) di a_{ii}.

◇ Una matrice quadrata si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$, cioè se sono nulli gli elementi diversi da a_{ii}.

◇ Una matrice (m,n) si dice della **forma a scalini** se, finchè possibile, ogni riga inizia (da sinistra) con un numero di zeri strettamente maggiore della riga precedente.

Esempio 12.2 Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice A è triangolare superiore, ma non a scalini; invece la matrice B è sia triangolare superiore che della forma a scalini.
In generale: ogni matrice *quadrata* della forma a scalini è sempre anche triangolare superiore. Il viceversa, in generale non è vero come mostra la matrice A dell'esempio precedente.

Nel seguito risulterà talvolta utile vedere una matrice $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ di tipo (m,n) come accostamento di m vettori riga (di $\mathbb{R}^n$) $\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}$ oppure come accostamento di n vettori colonna (di $\mathbb{R}^m$) $\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}$. Quindi, per esempio il vettore $\mathbf{r_i}$, riga i di A, è dato da $\mathbf{r_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{in} \end{pmatrix}$ e la matrice A si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{c_n} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \mathbf{c_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Data una qualunque matrice A di tipo (m,n) è possibile passare ad una matrice A' ancora di tipo (m,n) e avente forma a scalini facendo le seguenti

► **Trasformazioni elementari sulle righe di A**

I) R_{ij} : scambio della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$;

II) $k \cdot R_i$: prodotto della riga $\mathbf{r_i}$ per k $(\neq 0)$;

III) $R_i + kR_j$: somma della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$ moltiplicata per k.

Una matrice A' ottenuta da A mediante trasformazioni elementari è detta **equivalente** ad A.

Esempio 12.3 Mostriamo come applicare le trasformazioni elementari per passare da una matrice data A ad una matrice A', equivalente ad A, e della forma a scalini.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_12} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 + 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - 7R_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = A'$$

Avremmo anche potuto operare diversamente, ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_1 3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{2\left(R_2 + \frac{1}{2}R_1\right)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{7\left(R_3 - \frac{1}{7}R_2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A''$$

ed ottenere così un'altra matrice A'' equivalente ad A.
Quindi, in generale, esistono più matrici della forma a scalini che si ottengono con trasformazioni elementari da una data matrice A.

▶ **Matrice trasposta**. Data la matrice di tipo (m, n): $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$, la sua matrice **trasposta** (denotata A^T) è la matrice di tipo (n, m) ottenuta dallo scambio delle righe e delle colonne di A, cioè: $\left(A^T\right)_{ij} = (a_{ji})$

Esempio 12.4 Data la matrice di tipo $(3, 2)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, la sua matrice trasposta è la matrice di tipo $(2, 3)$: $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Si possono definire l'uguaglianza e la somma tra matrici dello stesso tipo e il prodotto di una matrice per uno scalare nel modo seguente.

▶ **Uguaglianza di matrici**. Le due matrici di tipo (m, n) : $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ e $B = (b_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$, sono uguali se e solo se hanno gli elementi ordinatamente uguali ossia se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni $i = 1\dots m$ e ogni $j = 1\dots n$.
▶ **Somma di matrici**. Date due matrici di tipo (m, n) : $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ e $B = (b_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$, la loro somma è definita come la matrice di tipo (m, n) ottenuta sommando gli elementi che occupano lo stesso posto, cioè

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$$

▶ **Prodotto per uno scalare**. Data la matrice di tipo (m, n) : $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ ed il numero reale c, il prodotto di c per A è definita come la matrice di tipo (m, n)

$$cA = (ca_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$$

Esempio 12.5 Date le due matrici di tipo $(3,2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice $2A - B$ è la matrice di tipo $(3,2)$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 4 & 2 \cdot 0 - 1 \\ 2 \cdot 2 - 0 & 2 \cdot 1 - \sqrt{2} \\ 2 \cdot 0 + 2 & 2 \cdot 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 2 - \sqrt{2} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, possono essere definite le seguenti operazioni di prodotto.

▶ **Prodotto di una matrice per un vettore colonna**.

Data la matrice di tipo (m,n) : $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ ed il vettore colonna di tipo $(n,1)$: $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{n}$ il loro prodotto $A\mathbf{x}$ è il vettore colonna di tipo $(m,1)$ le cui componenti sono ottenute eseguendo il prodotto scalare delle righe di A per $\mathbf{x}$. Detto $\mathbf{r_i}$ il vettore (riga) dato dalla riga i di A, si ha che

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{x} \\ \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

NOTA. Il prodotto scalare $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ coincide con il prodotto di una matrice per un vettore colonna se si intende il vettore $\mathbf{u}$ scritto in riga e il vettore $\mathbf{v}$ in colonna.

Esempio 12.6 Dati la matrice di tipo $(2,3)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ e il vettore colonna di tipo $(3,1)$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il prodotto $A\mathbf{x}$ è il vettore colonna di tipo $(2,1)$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

▶ **Prodotto righe per colonne di una matrice di tipo (m,n) per una matrice di tipo (n,p).**

Data la matrice di tipo (m,n) : $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ e la matrice di tipo (n,p) : $B = (b_{jk})_{j=1\ldots n}^{k=1\ldots p}$, il loro prodotto righe per colonne è dato dalla matrice di tipo (m,p) : AB ottenuta eseguendo il prodotto scalare dei vettori riga di A per i vettori colonna di B.

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{c_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_p} \\ \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_p} \end{pmatrix}$$

In particolare, se $D = AB$, l'elemento d_{ik} in riga i ed in colonna k si ottiene eseguendo il prodotto scalare della riga $\mathbf{r_i}$ di A con la colonna $\mathbf{c_k}$ di B, ossia

$$d_{ik} = \mathbf{r_i} \bullet \mathbf{c_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

NOTA BENE. Il prodotto righe per colonne tra due matrici si può eseguire *solo se* il numero di colonne della prima coincide con il numero di righe della seconda *(l'ordine è essenziale!)* ed il risultato è una matrice con un numero di righe uguale a quello della prima ed un numero di colonne uguale a quello della seconda.

Esempio 12.7 Date $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, il prodotto AB è la matrice di tipo $(2,3)$

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 - 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 - 1\cdot 5 & 0\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot 5 & 2\cdot 3 + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il prodotto BA **non** può essere eseguito.

Esempio 12.8 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, si possono eseguire entrambi i prodotti AB e BA. Si ottiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \qquad \text{mentre} \qquad BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$.

12.3 Determinante di una matrice quadrata

Ad ogni matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i=1...n}^{j=1...n}$ di ordine n si può associare un numero reale, detto **determinante di** A (e indicato con $\det A$ oppure con $|A|$). Per calcolare[1] il determinante della matrice quadrata A di ordine n, si procede nel modo seguente:

▶ se $n = 1$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}$;

▶ se $n = 2$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 12.9 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

si ha: $\det A = (-1)\cdot 2 - 0\cdot 5 = -2$; $\det B = 3\cdot(-1) - (-2)\cdot 1 = -1$.

Per poter calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine $n \geq 3$, dobbiamo introdurre le seguenti definizioni.

▶ Data la matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{n1} & & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si definisce

▶ **Minore complementare dell'elemento** a_{ij} : il determinante della matrice quadrata di ordine $(n-1)$, detta A_{ij}, e ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j.

▶ **Complemento algebrico di** a_{ij} : il numero reale $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

[1] Non viene fornita la definizione di determinante di una matrice, ma **solo** un metodo operativo per calcolarlo.

Esempio 12.10 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ allora

$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{11} è: $(-1)^{1+1}\det\ A_{11} = 5$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{21} è: $(-1)^{2+1}\det\ A_{21} = -2$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{31} è: $(-1)^{3+1}\det\ A_{31} = 1$

► Siamo ora in grado di calcolare il determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine $n \geq 3$:

Fissata una qualunque linea (riga o colonna) di A, il deteminante di A si ottiene sommando il prodotto di ogni elemento di tale linea per il suo complemento algebrico.

In formule, fissata per esempio la riga k, con $1 \leq k \leq n$ si ha

$$\det A = a_{k1}\,(-1)^{k+1}\det A_{k1} + a_{k2}\,(-1)^{k+2}\det A_{k2} + \cdots + a_{kn}\,(-1)^{k+n}\det A_{kn}$$

oppure, fissando la colonna k,

$$\det A = a_{1k}\,(-1)^{1+k}\det A_{1k} + a_{2k}\,(-1)^{2+k}\det A_{2k} + \cdots + a_{nk}\,(-1)^{n+k}\det A_{nk}.$$

NOTA Poichè il calcolo del determinante è indipendente dalla linea (riga o colonna) scelta, conviene, quasi sempre, fissare una linea della matrice che contenga il maggior numero di zeri.

Esempio 12.11 Sia A la matrice dell'esempio precedente. Per calcolarne il determinante fissiamo (ad esempio) la prima colonna, allora

$$\det A = a_{11}\,(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\det A_{21} + a_{31}\,(-1)^{3+1}\det A_{31}$$

ossia

$$\det A = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 12.$$

Fissando invece la terza riga si ottiene, come vediamo, lo stesso risultato:

$$\det A = 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (6+1) = 12.$$

Esempio 12.12 Per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

fissiamo, ad esempio, la prima colonna e otteniamo:

$$\det A = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fissando ora la seconda riga nella seconda matrice e la prima colonna nella terza otteniamo:

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -5 + 2 \cdot [-3 - 2 - 10] = -35.$$

▶ **Alcune proprietà del determinante**.

◇ Se A è triangolare, allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

◇ Se A ha una riga o una colonna di zeri, allora $\det A = 0$.

◇ Se A ha due righe o due colonne uguali, allora $\det A = 0$.

◇ Scambiando due righe (ossia applicando la Trasformazione I) o due colonne il determinante cambia segno.

◇ Moltiplicando una riga per un numero k ($\neq 0$) (ossia applicando la Trasformazione II) il determinante viene moltiplicato per k.

◇ Aggiungendo ad una riga un multiplo di un'altra (ossia applicando la Trasformazione III) il determinante non cambia.

◇ *(Teorema di Binet)* Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

◇ Data la matrice quadrata di ordine 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

ed esiste un metodo geometrico per calcolare il determinante detto *regola di Sarrus.*

Calcolo del determinante con le trasformazioni elementari

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine n si può anche procedere così:

$\triangle$ Attraverso trasformazioni elementari passiamo dalla matrice A ad una matrice equivalente A', quadrata e a scalini, quindi triangolare superiore.

$\triangle$ Calcoliamo facilmente il determinante della matrice A' utilizzando la prima proprietà del determinante.

$\triangle$ Utilizzando le altre proprietà del determinante e ricordando quali trasformazioni abbiamo applicato per passare da A ad A' possiamo dedurre $\det(A)$.

Esempio 12.13 Per calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la trasformiamo in una matrice equivalente a scalini.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{R_2 + \frac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - \frac{2}{7}R_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{pmatrix} = A'$$

Inoltre $\det(A') = 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{7} = 12$.
Poichè per passare da A ad A' abbiamo utilizzato solo la trasformazione III che non cambia il determinante si avrà: $\det(A) = \det(A') = 12$ (come già calcolato in altro modo nell'Esempio 12.11).

Esempio 12.14 Calcoliamo il determinante della seguente matrice A trasformandola in una matrice equivalente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_1 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} R_3 + \frac{4}{3}R_2 \\ R_4 - \frac{1}{2}R_3 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix} \boxed{R_4 + \frac{3}{2}R_3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A'$$

Inoltre $\det(A') = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (-5) = 35$ e poichè la matrice A' è stata ottenuta da A applicando un po' di volte la trasformazione III, che non cambia il determinante, e una volta la trasformazione I, che cambia segno al determinante, si ha (come già visto nell'Esempio 12.12)

$$\det(A) = -\det(A') = -35.$$

12.4 Matrici inverse di matrici quadrate

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

► A è detta **invertibile** se esiste una matrice A^{-1} (detta **inversa di** A), quadrata di ordine n, tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

dove I è la matrice **identica** di ordine n,[2] cioè

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.15 La matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Infatti si verifica che:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e anche} \quad A^{-1}A = I.$$

Esempio 12.16 La matrice inversa *non* sempre esiste. Ad esempio, la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
Infatti se esistesse una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $I = AB$, dovrebbe essere

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix},$$

da cui $0 = 1$, ma questo è impossibile.
Alla stessa conclusione si può anche giungere osservando che $\det A = 0$ e che ogni matrice con deteminante nullo non è invertibile. Infatti: se C è invertibile e C^{-1} è la sua inversa si ha $CC^{-1} = I$ e quindi $\det(CC^{-1}) = \det I = 1$. D'altra parte, per il Teorema di Binet si ha: $\det(CC^{-1}) = \det C \det C^{-1}$ e quindi $\det C \det C^{-1} = 1$, quindi, in particolare, il determinante di ogni matrice invertibile C è diverso da zero.

Il teorema seguente dà una condizione per garantire che la matrice A sia invertibile e mostra come calcolare l'inversa.

Teorema 12.1 *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da*

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

In particolare, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$, allora $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

[2] Poichè la matrice identica I di ordine n è triangolare, è semplice mostrare che $\det I = 1$, qualunque sia n.

Esempio 12.17 Calcolare, se possibile, la matrice inversa delle seguenti matrici

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$i)$ $\det A = 5$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$ii)$ $\det A = 0$ quindi non esiste l'inversa;

$iii)$ $\det A = -5$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcolo dell'inversa con le trasformazioni elementari

Nel seguito, viene mostrato un altro metodo per determinare la matrice inversa basato sulle trasformazioni elementari.[3)]
Per applicarlo si procede così:
△ Si affianca alla matrice A che si vuole invertire la matrice identica dello stesso ordine, ottenendo in questo modo una matrice B di tipo $(n, 2n)$.
△ Si opera sulla matrice B con trasformazioni elementari fino ad ottenere una matrice B' le cui prime n colonne siano la matrice identica.
△ Le n colonne a destra della matrice B' sono la matrice inversa A^{-1}.

Esempio 12.18 Calcoliamo in questo modo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 + \tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 - \tfrac{3}{2}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2 + \frac{4}{5}R_3 \\ R_1 - \frac{2}{5}R_3 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 - R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{2}R_1 \\ -\frac{2}{5}R_3 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Quindi la matrice inversa è $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ come già trovato nell'esempio precedente.

3) Il metodo si basa sulla risoluzione simultanea con il metodo di Gauss di n sistemi non omogenei di n equazioni in n incognite.

12.5 Caratteristica o rango di una matrice

Data una matrice di tipo (m, n) : A, e un intero k, con $k \leq \min(m, n)$ si definisce:

▶ **Minore di ordine** k **estratto da** A : il determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine k ottenuta prendendo gli elementi comuni a k righe di k colonne di A.

▶ **Caratteristica o rango di** A (denotata con Car A) : l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

In altre parole, Car $A = r$ se esiste un minore di ordine r estratto da A diverso da zero **e** se tutti i minori di ordine $r+1$ estratti da A sono nulli.

▶ Per calcolare la caratteristica di una matrice può essere utile utilizzare il seguente

Teorema 12.2 (di Kronecker) *Sia A una matrice di tipo (m, n) e sia $r < \min(m, n)$. Se la matrice A contiene una sottomatrice quadrata A' di ordine r con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ che contengono A' (dette* ***orlate*** *di A) hanno determinante uguale a zero, allora Car $A = r$.*

Esempio 12.19 Determinare la caratteristica delle seguenti matrici.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Poichè $\det A = 5 \neq 0$, Car $A = 2$;

ii) Poichè $\det A = 0$, deve essere Car $A \leq 2$. Prendendo (ad esempio) le prime due righe e colonne si ottiene la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, con $\det B = -3$, quindi Car $A = 2$;

iii) Poichè la matrice A è di tipo $(3, 4)$, sarà Car $A \leq 3$. Applicando il Teorema di Kronecker consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ottenuta da A prendendo le prime due righe e colonne: essa ha $\det B \neq 0$. Le matrici di ordine 3 che contengono la matrice B sono:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det B_1 = \det B_2 = 0$ entrambi le matrici di ordine 3 che contengono B hanno determinante nullo e quindi Car $A = 2$.

Esempio 12.20 Determinare, al variare del parametro reale k, la caratteristica delle matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ k & 1 & k \\ 2k & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè A_k sono matrici di tipo $(4,3)$, certamente deve essere Car $A_k \leq 3$.

Per la sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $\det B = -3 (\neq 0)$ e quindi Car$A_k \geq 2$ per ogni k.

Le sottomatrici di ordine 3 che contengono B sono:

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ 2k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e si ha: $\det C_k = k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3)$ e $\det D_k = 2k^2 + 2k - 12 = 2(k+3)(k-2)$.

Quindi:

se $k = 2$ allora Car $A_k = 2$ (infatti si ha $\det C_2 = \det D_2 = 0$, ossia entrambi i minori che contengono B sono nulli);

se $k \neq 2$ allora Car $A_k = 3$ Infatti: se $k \neq \pm 3$ allora sia $\det C_k \neq 0$ che $\det D_k \neq 0$; se $k = 3$ allora $\det C_3 = 0$, ma $\det D_3 \neq 0$; se $k = -3$ allora $\det D_{-3} = 0$, ma $\det C_{-3} \neq 0$. Quindi per ogni $k \neq 2$ c'è almeno un minore che contiene B non nullo.

Calcolo della caratteristica (o rango) con le trasformazioni elementari

Nel seguito, viene mostrato un altro metodo per determinare la caratteristica di una matrice A basato sulle trasformazioni elementari[4]. Per applicarlo si procede così:

△ Attraverso trasformazioni elementari passo dalla matrice A alla matrice equivalente A' della forma a scalini.

△ La caratteristica (o rango) di una matrice a scalini è il numero r di righe che contengono almeno un elemento non nullo.

△ La caratteristica di due matrici equivalenti è uguale.

Esempio 12.21 Determiniamo la caratteristica delle seguenti matrici con le trasformazioni elementari.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$i)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boxed{R_2 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = A'$. Quindi si ha: Car A' =Car $A = 2$;

$$ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \boxed{R_2 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Quindi Car A' =Car $A = 2$;

$$iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - \tfrac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$. Quindi Car A' =Car $A = 2$.

[4] Può essere dimostrato che il rango di matrici equivalenti è uguale, ma questo esula dal contenuto di queste note.