Statistica

Esercitazione X

1 Dicembre 2022

Esercizio 1 Per 8 sale cinematografiche vengono rilevate le variabili F (fatturato medio settimanale, in migliaia di euro) ed S (spesa mensile per manutenzione sala e noleggio film, in migliaia di euro). Si vuole studiare la relazione tra F (variabile dipendente) e S.

F	15	6	12	16	18	14	16	12
S	8.2	3.4	6.2	12.5	13.2	7.2	11.2	5.2

1. Si rappresentino graficamente le coppie di dati e la funzione di regressione di F dato S.
2. Si calcolino, secondo il criterio dei minimi quadrati, i parametri e gli indici di adattamento dei seguenti modelli di regressione, individuando quello migliore:

$$F = a + b \cdot S, \qquad F = c \cdot \sqrt{S}.$$

3. Sulla base del miglior modello si preveda il fatturato di una sala cinematografica con spese pari a 5 mila euro.
4. Si determini il valore del rapporto di correlazione $\eta^2_{F|S}$, commentando il valore trovato.

Esercizio 2 Si completino le seguenti tabelle, riportando modalità e frequenze e motivando teoricamente la risposta, in modo tale che siano soddisfatte le condizioni sotto riportate.

$X \setminus Y$	2	5	8
x_1	2	4	2
x_2		4	4

$\eta^2_{Y|X} = 0, \eta^2_{X|Y} > 0$

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	2	4	2
x_2		4	4

$\rho^2 = 0$

Esercizio 3 Si considerino due urne U_1 e U_2 così composte:

1. $U_1 = \{18 \text{ palline bianche}, 17 \text{ palline rosse}, 5 \text{ palline verdi}\}$;
2. $U_2 = \{10 \text{ palline bianche}, 16 \text{ palline rosse}, 24 \text{ palline verdi}\}$.

Viene lanciato un dado. Se si ottiene un multiplo di 3 viene estratta una pallina da U_1, altrimenti viene estratta una pallina da U_2. Si calcoli la probabilità che la pallina estratta sia bianca.

Esercizio 4 Un'urna contiene 15 palline, di cui 5 verdi, 5 rosse e 5 blu. Ne vengono estratte 2. Si calcoli la probabilità che siano dello stesso colore assumnedo che le estrazioni avvengano:

- con reimmissione;
- senza reimmissione.

Esercizio 5 Sapendo che $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, si calcoli $P(A \cup B)$ nelle seguenti ipotesi:

- A e B siano eventi indipendenti;
- A e B siano eventi disgiunti;
- $P(A|B) = 0.7$.

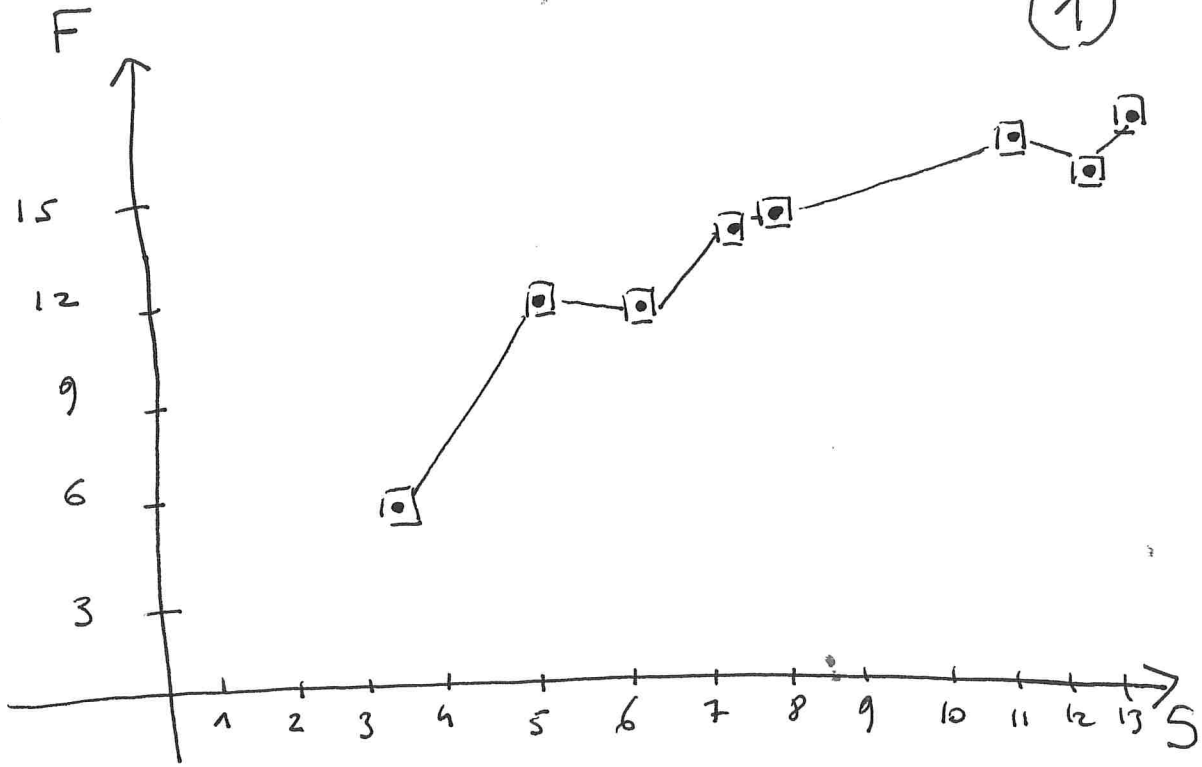
Esercizio 6 Sapendo che A, B e C formano una partizione di Ω e che $P(A) = 0.2$ e $P(B) = 2 \cdot P(C)$, si calcoli:

$$P(B \cup C), \quad P(A \cap C), \quad P(A - B), \quad P(A|B).$$

ESERCIZIO 1

S	F	$X = \sqrt{S}$
8.2	15	2.8636
3.4	6	1.8439
6.2	12	2.49
12.5	16	3.5355
13.2	18	3.6332
7.2	14	2.6833
11.2	16	3.3466
5.2	12	2.2804

1)



2) I MODELLO: $F = a + b \cdot S$; $\hat{b} = Cov(S, F)/Var(S)$; $\hat{a} = M(F) - \hat{b}\, M(S)$

$M(S) = 8.3875$; $M(S^2) = 81.50625$; $Var(S) = 11.1561$

$M(F) = 13.625$; $M(F^2) = 197.625$; $Var(F) = 11.9844$

$M(SF) = 124.725 \Rightarrow Cov(S, F) = M(SF) - M(S)M(F) = 10.4453$

$\hat{b} = \dfrac{10.4453}{11.1561} = 0.9363$; $\hat{a} = 13.625 - 0.9363 \cdot 8.3875 = 5.7719$

$$\boxed{F = 5.7719 + 0.9363 \cdot S}$$

$$R^2 = \rho^2_{S,F} = \frac{Cov^2(S,F)}{Var(S)Var(F)} = 0.8160 \; ; \quad \sigma^2_{RE,\,I\,MOD.} = \sigma^2_F(1-R^2) = 11.9844(1-0.8160)$$

$$= 2.2051$$

II MODELLO: $F = c\sqrt{S} \Rightarrow X := \sqrt{S} \Rightarrow F = cX$

$$\hat{c} = \frac{M(XF)}{M(X^2)} = \frac{40.5424}{8.3875} = 4.8337$$

$$M(XF) = 40.5424$$

$$M(X^2) = M(S) = 8.3875$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F &= 4.8337X \\ &= 4.8337\sqrt{S} \end{aligned}}$$

Modello incompleto: $\sigma^2_{RE,\,II\,MOD.} = M(F^2) - \hat{c}\,M(XF)$

$$= 197.625 - 4.8337 \cdot 40.5424 = 1.6567$$

3. $\sigma^2_{RE,\,II\,MOD.} = 1.6567 < 2.2051 = \sigma^2_{RE,\,I\,MOD.} \Rightarrow$ II MODELLO È MIGLIORE

$$\hat{F} = \hat{c}\sqrt{S}\Big|_{S=5} = 4.8337 \cdot \sqrt{5} = 10.8084$$

4. $\eta^2_{FIS} = 1$, POICHÉ VI È DIPEND. FUNZIONALE DI F DA S.

ESER. 2 (ESER. 4 DELLA ESER. IX)

X\Y	2	5	8
x_1	2	4	2
x_2	4	4	4

$\eta^2_{Y|X} = 0, \quad \eta^2_{X|Y} > 0$

$\hookrightarrow M(Y|x_1) = M(Y|x_2)$

$= 5 \qquad = 5$

$M(X|y=2) = \dfrac{2x_1 + 4x_2}{6}$

$\neq$ PER INFINITI VALORI DI x_1 E x_2

$M(X|y=5) = \dfrac{4x_1 + 4x_2}{8}$

QUINDI CONDIZIONE SODDISFATTA

X\Y	2 y_1	5 y_2	8 y_3
x_1	2	4	2
x_2	4	4	4

$\rho^2 = 0$

$0 \leq \rho^2 \leq \eta^2_{Y|X} = 0$

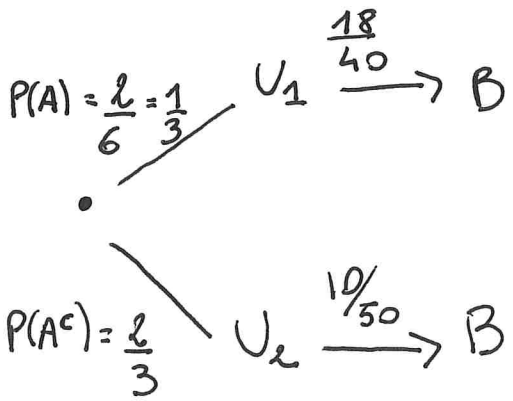
$\eta^2_{Y|X} = 0$

$\Rightarrow \rho^2 = 0$

ESERCIZIO 3

B := "SI ESTRAE UNA PALLINA BIANCA"

A := "DAL LANCIO DEL DADO SI OTTIENE UN MULTIPLO DI 3" = $\{3, 6\}$



TEOREMA DELLE PROB. TOTALI

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

$$= \frac{18}{40} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{50} \cdot \frac{2}{3} = 0.2833$$

ESERCIZIO 4

$U = \{5 \text{ VERDI}, 5 \text{ ROSSE}, 5 \text{ BLU}\}$

A = "SI ESTRAGGONO 2 PALLINE DELLO STESSO COLORE"

V_1 = "LA PRIMA PALLINA ESTRATTA È VERDE"; V_2 = "LA SECONDA PALLINA ESTRATTA È VERDE"

R_1 = " - - - - - - - - È ROSSA"; R_2 = " - - - - - - - - - - - - - - - - - ROSSA"

B_1 = " - - - - - - - - - - - È BLU"; B_2 = " - - - - - - - - - - - - - - - - - BLU"

$$P(A) = P(V_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

- CON REIMMISSIONE: ESTRAZIONI INDIPENDENTI

$$= P(V_1)P(V_2) + P(R_1)P(R_2) + P(B_1)P(B_2)$$

$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = 3\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{15}_{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

- SENZA REIMMISSIONE : ESTRAZIONI NON INDIPEND.

$$P(A) = P(V_2|V_1)P(V_1) + P(R_2|R_1)P(R_1) + P(B_2|B_1)P(B_1)$$

$$= \frac{4}{14}\cdot\frac{5}{15} + \frac{4}{14}\cdot\frac{5}{15} + \frac{4}{14}\cdot\frac{5}{15} = \cancel{3}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{14}_{7}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{15}\,\cancel{3}} = \frac{2}{7}.$$

ESERC. 5

$P(A) = 0.3$; $P(B) = 0.4$; $P(A \cup B) = ?$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$

  $\Rightarrow P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58$

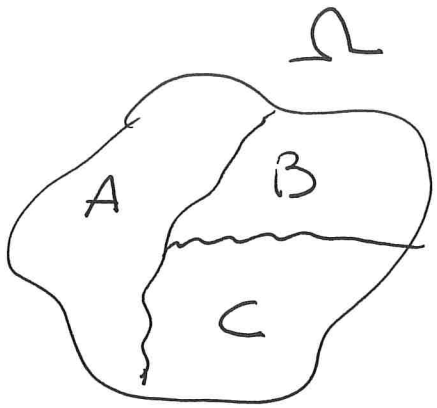
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

  $\Rightarrow P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0 = 0.7$

- $P(A|B) = 0.7 \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.7 \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot 0.7 = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$

  $\Rightarrow P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.28 = 0.42$

ESER 6



$P(A) = 0.2, \quad P(B) = 2P(C)$

- TROVIAMO $P(B)$ E $P(C)$

$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P(B) + P(C) = 0.2 + 2P(C) + P(C) = 0.2 + 3P(C)$$

$$\iff 1 = 0.2 + 3P(C) \Rightarrow 0.8 = 3P(C) \Rightarrow P(C) = \frac{0.8}{3} = 0,2667$$

$$P(B) = 2 \cdot 0.2667 = 0.5334$$

- $P(B \cup C) \overset{B \cap C = \emptyset}{=} P(B) + P(C) = 0.2667 + 0.5334 = 0.8$

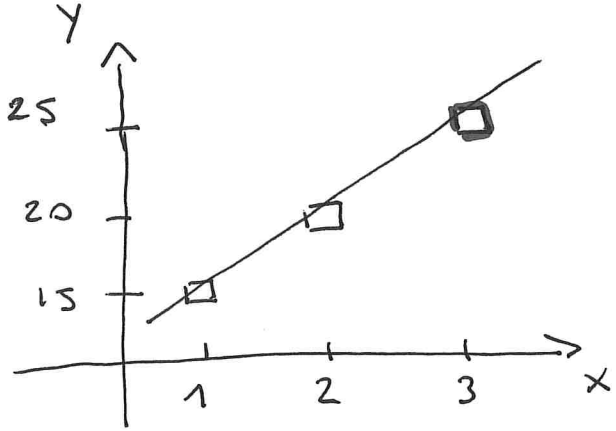
$\overset{\text{EQUIV.}}{=} 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$

- $P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$
- $P(A - B) = P(A \cap B^c) = P(A \cap (A \cup C)) = P(A) = 0.2$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = \dfrac{0}{0.5334} = 0$

ESER 5 ESERCITAZIONE IX

Y\X	1	2	3
10	8	1	0
20	8	4	a
30	0	1	b

$\eta^2_{Y|X} = \rho^2 \rightarrow M(Y|X)$ SONO ALLINEATE



$$M(Y|X=1) = \frac{10\cdot 8 + 20\cdot 8}{16} = 15$$

$$M(Y|X=2) = \frac{10\cdot 1 + 20\cdot 4 + 30\cdot 1}{6} = 20$$

$$M(Y|X=3) = 25 = \frac{20\cdot a + 30\cdot b}{a+b}$$

$$25 = \frac{20\cdot a + 30\cdot b}{28}$$

$$\Rightarrow a = 14,\ b = 14.$$

$n = 50$

$a+b = 50 - 22 = 28$