Statistica

Esercitazione VI

27 Ottobre 2022

Esercizio 1 (Indice di connesione e riepilogo) Nel seguente prospetto vengono riportate le osservazioni di 12 studenti della facoltà di Economia relativamente alle variabili Y = *tipologia di diploma* (c = maturità classica, s = maturità scientifica) e X = *voto di laurea*:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	c	c	s	s	s	c	c	s	s	s	s	s
X	84	108	96	108	97	92	108	83	110	106	90	107

1. Si fornisca una opportuna rappresentazione grafica della variabile X dopo aver raggruppato le sue modalità in classi di ampiezza 10 a partire da 80.
2. Servendosi della suddivisione in classi al punto precedente, si costruisca la tabella di frequenza congiunta delle due variabili.
3. Servendosi della suddivisione in classi, si calcolino la mediana e un opportuno indice di variabilità per la variabile X.
4. Si calcolino la varianza within e la varianza between per la variabile X nei gruppi definiti dalla variabile Y.
5. Per la variabile Y si calcoli un indice di mutabilità e si indichi uno scenario di massima eterogeneità.
6. Si stabilisca il valore assunto dall'indice di connessione normalizzato. Si commenti il risultato.

Esercizio 2 Si consideri la seguente serie dei numeri indici a base fissa ($t = 2000$) relativa all'andamento della variabile X:

t	2000	2001	2002	2003	2004
$NIBF$	1.00	0.90	0.88	1.05	1.10

1. Si costruisca la serie dei numeri indici a base mobile.

2. Sapendo che $X_{2002} = 110$, si ricostruisca la serie delle osservazioni di X.

3. Si calcoli X_{2005} sapendo che il tasso medio di variazione tra il 2000 e il 2005 è risultato pari a 0.06.

Esercizio 3 Si completi ciascuna delle seguenti tabelle in modo tale che siano soddisfatte le condizioni riportate.

$Y \backslash X$	1	2	3	
y_1				10
y_2				5
	5	5	5	15

$$\chi^2_N = 1,\ M(X|y_1) = 2$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	
y_1				3
y_2				9
				12

$$\chi^2_N = 0,\ E_N(X) = 1$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	
y_1				
y_2				
	8	8	8	24

$$\chi^2 = 24,\ Mo(Y) = y_2$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	
y_1				10
y_2				10
				20

$$\chi^2_N = 1,\ Var(X|y_2) = 0$$

$Y \backslash X$	3	4	5	
y_1				
y_2				

$$\chi^2_N = 1,\ \sigma^2_W(Y|X) = 0,\ M(X|y_2) = 4$$

$Y \backslash X$	3	4	5	
y_1				
y_2				

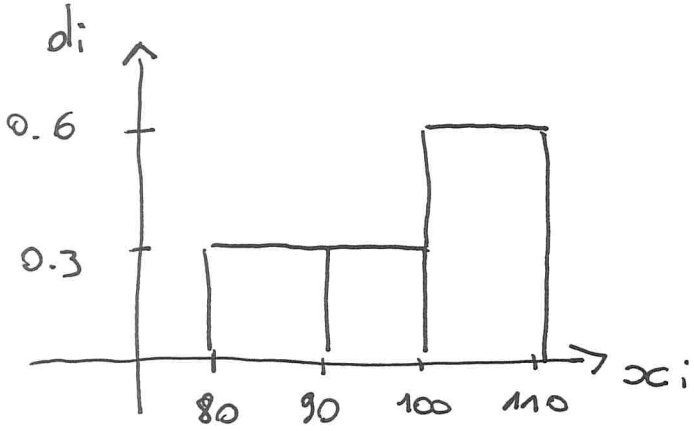
$\chi^2_N = 1$, $\sigma^2_B(X|Y) = 0$

ESERCIZIO 1

1. X = "VOTO DI LAUREA" : DATO CONTINUO RAGGRUPPATO IN CLASSI → ISTOGRAMMA

$x_{i-1} \dashv x_i$	x_i^c	n_i	a_i	$d_i = \frac{n_i}{a_i}$	f_i	F_i
80 ⊣ 90	85	3	10	0.3	$1/4 = 0.25$	0.25
90 ⊣ 100	95	3	10	0.3	$1/4 = 0.25$	0.5
100 ⊣ 110	105	6	10	0.6	$6/12 = 0.5$	1
		12			1	

← CLASSE MEDIANA, CIOÈ LA PRIMA CLASSE CON $F_i \geq 0.5$



2.

X \ Y	c	s	
80 ⊣ 90	1	2	3
90 ⊣ 100	1	2	3
100 ⊣ 110	2	4	6
	4	8	12

3. CLASSE MEDIANA: 90 ⊣ 100

$$\text{Mediana}(X) = h_{i-1} + (0.5 - F_{i-1}) \cdot \frac{a_i}{f_i} = 90 + (0.5 - 0.25)\frac{10}{0.25} = 100$$

$$M(X) = 85 \cdot 0.25 + 95 \cdot 0.25 + 105 \cdot 0.5 = 97.50$$

$$M(X^2) = 85^2 \cdot 0.25 + 95^2 \cdot 0.25 + 105^2 \cdot 0.5 = 9575$$

$$\Rightarrow Var(X) = 9575 - 97.5^2 = 68.75$$

$$CV(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{M(X)} = \frac{\sqrt{68.75}}{97.50} = 0.085$$

4. $M(X|Y=c) = 85\cdot\frac{1}{4} + 95\cdot\frac{1}{4} + 105\cdot\frac{2}{4} = 97.50$

$M(X|Y=s) = 85\cdot\frac{2}{8} + 95\cdot\frac{2}{8} + 105\cdot 4/8 = 97.50$

$M(X^2|Y=c) = 85^2\cdot\frac{1}{4} + 95^2\cdot\frac{1}{4} + 105^2\cdot\frac{2}{4} = 9575$

$M(X^2|Y=s) = 85^2\cdot\frac{2}{8} + 95^2\cdot\frac{2}{8} + 105^2\cdot 4/8 = 9575$

$\Rightarrow Var(X|Y=c) = M(X^2|Y=c) - [M(X|Y=c)]^2 = 9575 - 97.5^2 = 68.75$

$Var(X|Y=s) = M(X^2|Y=s) - [M(X|Y=s)]^2 = 9575 - 97.5^2 = 68.75$

$h \rightarrow$ NUMERO GRUPPI

$$\sigma_W^2(X|Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h}\sigma_j^2\cdot n_j = \frac{1}{12}\left(68.75\cdot 4 + 68.75\cdot 8\right) = 68.75$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h}(\mu_j-\mu)^2\cdot n_j = \frac{1}{12}\left[\underbrace{(97.50-97.5)^2}_{=0}\cdot 4 + \underbrace{(97.50-97.5)^2}_{=0}\cdot 8\right] = 0$$

TALE RISULTATO È IMMEDIATAMENTE VISIBILE DAL FATTO CHE LE $M(X|Y)$ SONO UGUALI E QUINDI NON C'È VARIABILITÀ.

$\sigma_X^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2 = 68.75 + 0 = 68.75$

5.

y_i	n_i	f_i
C	4	$1/3$
S	$\frac{8}{12}$	$\frac{2/3}{1}$

$$\Rightarrow \quad E_Y = 1 - \left(\tfrac{1}{3}^2 + \tfrac{2}{3}^2\right) = 1 - 5/9 = 4/9$$

$$E_{MAX} = 1 - \frac{1}{k}\Big|_{k=2} = 1 - \frac{1}{2} = 1/2 = 0.5$$

$$E_N = \frac{4/9}{0.5} = 0.8888$$

POICHÉ E_N É VICINO AL SUO VALORE MASSIMO, CIOÈ 1, CONCLUDIAMO CHE VI È ELEVATA MUTABILITÀ.

6. $\chi^2_N = \dfrac{\chi^2}{\chi^2_{MAX}}$; $\chi^2 = 0$ POICHÉ, ESSENDO LE RIGHE/COLONNE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA TRA LORO PROPORZIONALI, X E Y SONO STOC. INDIP.

$$\Rightarrow \chi^2_N = 0.$$

ESERCIZIO 2

t	NIBF	NIBM
2000	1	–
2001	0.9	0.9
2002	0.88	0.9778
2003	1.05	1.1932
2004	1.10	1.0476

1. $$_{00}I_{01} = \frac{x_{01}}{x_{00}} = \frac{x_{01}/x_{00}}{x_{00}/x_{00}} = \frac{_{00}I_{01}}{1} = 0.9$$

$$_{01}I_{02} = \frac{x_{02}}{x_{01}} = \frac{x_{02}/x_{00}}{x_{01}/x_{00}} = \frac{_{00}I_{02}}{_{00}I_{01}} = \frac{0.88}{0.90} = 0.9778$$

$$_{02}I_{03} = \frac{x_{03}}{x_{02}} = \frac{x_{03}/x_{00}}{x_{02}/x_{00}} = \frac{_{00}I_{03}}{_{00}I_{02}} = \frac{1.05}{0.88} = 1.1932$$

$$_{03}I_{04} = \frac{x_{04}}{x_{03}} = \frac{x_{04}/x_{00}}{x_{03}/x_{00}} = \frac{_{00}I_{04}}{_{00}I_{03}} = \frac{1.10}{1.05} = 1.0476$$

2. $X_{2002} = 110$

$$X_{2000} = X_{2002} \cdot \frac{X_{2000}}{X_{2002}} = 110 \cdot \frac{1}{{}_{00}I_{02}} = 110 \cdot \frac{1}{0.88} = 125.004$$

$$X_{2001} = X_{2002} \cdot \frac{X_{2001}}{X_{2002}} = 110 \cdot \frac{1}{{}_{01}I_{02}} = 110 \cdot \frac{1}{0.9778} = 112.4970$$

$$X_{2003} = X_{2002} \cdot \frac{X_{2003}}{X_{2002}} = 110 \cdot {}_{02}I_{03} = 110 \cdot 1.1932 = 131.2520$$

$$X_{2004} = X_{2002} \cdot \frac{X_{2004}}{X_{2002}} = 110 \cdot {}_{02}I_{04} = 110 \cdot {}_{02}I_{03} \cdot {}_{03}I_{04} =$$

$$= 110 \cdot 1.1932 \cdot 1.0476 = 137.4996.$$

3. ${}_{00}\overline{TV}_{05} = 0.06$

$$\Rightarrow X_{2005} = X_{2000} \cdot (1 + 0.06)^5 = 125.004 \cdot (1.06)^5 = 167.2836$$

ESERCIZIO 3

Y\X	1	2	3	
y_1	5	0	5	10
y_2	0	5	0	5
	5	5	5	15

$\chi^2_N = 1$, $M(X|y_1) = 2$

DIP. FUNZ.

Y\X	x_1	x_2	x_3	
y_1	1	1	1	3
y_2	3	3	3	9
	4	4	4	12

$\chi^2_N = 0$, $\underbrace{E_N(X) = 1}_{\text{MASSIMA ETEROGENEITÀ}}$

IND. STOC.

Y\X	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	8	0	8
y_2	8	0	8	16
	8	8	8	24

DIP. FUNZ.

$\chi^2 = 24$, $M_0(Y) = y_2$

$\chi^2_{MAX} = n \cdot \min[r-1 ; c-1] = 24 \cdot 1 = 24$

Y\X	x_1	x_2	x_3	
y_1	5	0	5	10
y_2	0	10	0	10
	5	10	5	20

$\chi^2_N = 1$, $Var(X|y_2) = 0$

DIP. FUNZ.

8

$y \backslash x$	3	4	5	
y_1	0	4	0	4
y_2	10	0	10	20
	10	4	10	24

$\chi^2_N = 1$, $\sigma^2_W(Y|X) = 0$, $M(X|y_2) = 4$

$\chi^2_N = 1 \Rightarrow$ DIP. FUNZ.

$\sigma^2_W(Y|X) = 0 \Rightarrow$ VARIANZE NEI GRUPPI DEFINITI DALLA X SONO TUTTE UGUALI A ZERO

$y \backslash x$	3	4	5	
y_1	2	0	2	4
y_2	0	11	0	11
	2	11	2	15

$\chi^2_N = 1$, $\sigma^2_B(X|Y) = 0$

$\chi^2_N = 1 \Rightarrow$ DIP. FUNZ.

$\sigma^2_B(X|Y) = 0 \Rightarrow M(X|y_1) = M(X|y_2)$