$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}\,x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

(1) LIM NOTEVOLI

N.B. formule di duplicazione

$\begin{cases} \mathrm{sen}\,2\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \text{con } \alpha = x/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathrm{sen}\,x = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}\,x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}\,x} \cdot \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x/2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{(x/2)^2}}_{1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{1/4} =$$

$$= \boxed{1/8}$$

(2) ASINTOTICI

se $t \to 0$ $\mathrm{sen}\,t \sim t$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}\,x}{x^3} \sim$$

$$\sim \frac{2\cdot\frac{x}{2} - x}{x^3} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ASSOLUTAMENTE SBAGLIATO!!

$\Rightarrow$ Gli asintotici esprimono un'APPROSSIMAZIONE, quindi 0 è un risultato impreciso e il numeratore non è effettivamente nullo!

$\Rightarrow$ se con +/− interi fattori si annullano, non posso usare gli asintotici!
(meglio usarli quando ci sono soltanto prodotti e/o quozienti)

MA da (1) sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}\,x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}^{F_1}\overbrace{\left[1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}^{F_2}}{\underbrace{x^3}_{F_3}} \sim$$

Adesso posso usare gli asintotici perché ho solo 3 fattori e 1 frazione

se $t \to 0$ $\mathrm{sen}\,t \sim t$

se $t \to 0$ $1-\cos t \sim t^2/2$

$$\sim \frac{\overbrace{2\,\frac{x}{2}}^{F_1} \cdot \overbrace{\frac{(x/2)^2}{2}}^{F_2}}{x^3} = \frac{x \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{x^3} = \frac{\frac{1}{8}\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} =$$

$$= \boxed{1/8}$$

(3) DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}\,x}{x^3} =$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{sen}\,x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x}{6} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\cdot 1 + 1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{-1+4}{4} = \frac{1}{\cancel{6}_2}\cdot\frac{\cancel{3}}{4} =$$

$$= \boxed{1/8}$$