

RETTE PARALLELE

- 2 PARALLELE A B $a \parallel b$ -

$$(a \cap b = \emptyset) \vee (a = b)$$

- ASSIOMA PARALLELA (EUCLIDE) -

$$\forall r \forall A ((\exists! a (a \parallel r \wedge A \in a))$$

- PROPRIETA' TRANSITIVA PARALLELISMO -

$$\forall a \forall b \forall c (a \parallel b \wedge b \parallel c \rightarrow a \parallel c)$$

ipotesi

$$\begin{array}{l} a \parallel b (*) \\ b \parallel c (o) \end{array}$$

4

5

tesi

$$a \parallel c$$

dimostrazione per assurdo (indiretta)

(1)	$\neg(a \parallel c)$	$\neg TS$	
(2)	$a \cap c = b$	(1)	
(3)	$a \cap b = \{P\}$	(2)	
(4)	CONTRADDIZIONE	(3)	
(5)	$a \parallel c$	$\neg(\neg TS) = TS$	

TEOREMA DELL'ASSE e ASSE DI UN SEGMENTO

asse di $[BC]$

1) $a \perp [BC]$

2) $M \in a$

$M =$ punto medio di $[BC]$

definizione

insieme dei punti
equidistanti da B e C

$a = \{P \in \Pi : d(P, B) = d(P, C)\}$

proprietà caratterizzante

enunciato:

L'asse a di $[BC]$ è il luogo (geometrico)
dei punti equidistanti da B e C .

enunciato *forma condizionale*:

Se P appartiene all'asse $[BC]$
allora P è equidistante da B e C .



Se p è equidistante da B e C
allora appartiene all'asse $[BC]$.

ipotesi

asse $[BC]$ (*)

$P \in a$ (°)

1

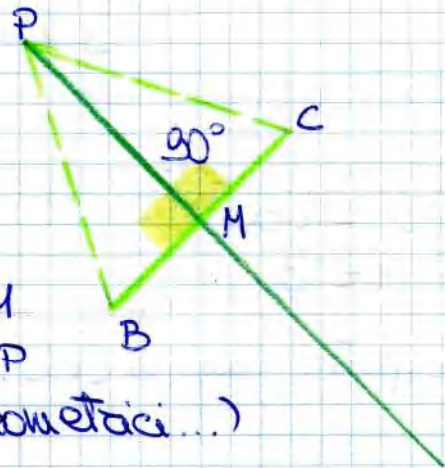
4

tesi

$d(P, B) = d(P, C)$

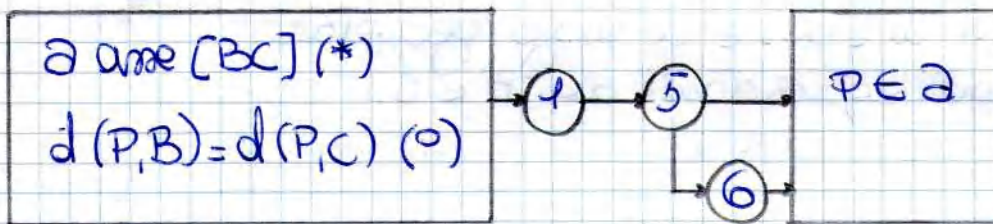
dimostrazione

(1)	H medio $[BC]$	costruzione
(2)	$d(N,B)=d(N,C)$	(1)
(3)	$m(\angle BNP)=90^\circ=m(\angle CNP)$	$IP(*) (0)$
(4)	$d(P,B)=d(P,C)$	(2) (3) criterio T1 ($\angle BNP$ e $\angle CNP$ hanno ipotenuse...)

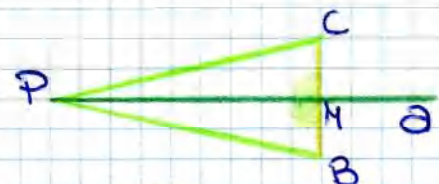


ipotesi

tesi



(1)	H medio $[BC]$	costruzione
(2)	$d(N,B)=d(N,C)$	(1)
(3)	$m(\angle BNP)=m(\angle CNP)$	(2) $IP(0)$ criterio TR 3 ($\angle BNP$ e $\angle CNP$ hanno ipotenuse...)
(4)	$(PN) \perp [BC]$	(1) (3)
(5)	$(PN) \in \alpha$	(1) (4) $IP(*)$
(6)	$P \in \alpha$	(5)



TRIANGOLO

TEOREMA DEGLI ASSI DI UN TRIANGOLO: CIRCOCENTRO

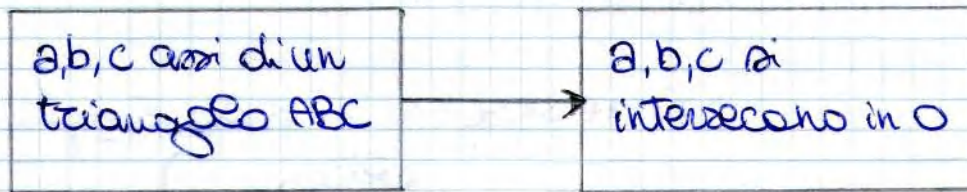
enunciato:

Gli assi di un triangolo ABC
si intersecano in un punto O

enunciato *forma condizionale*:

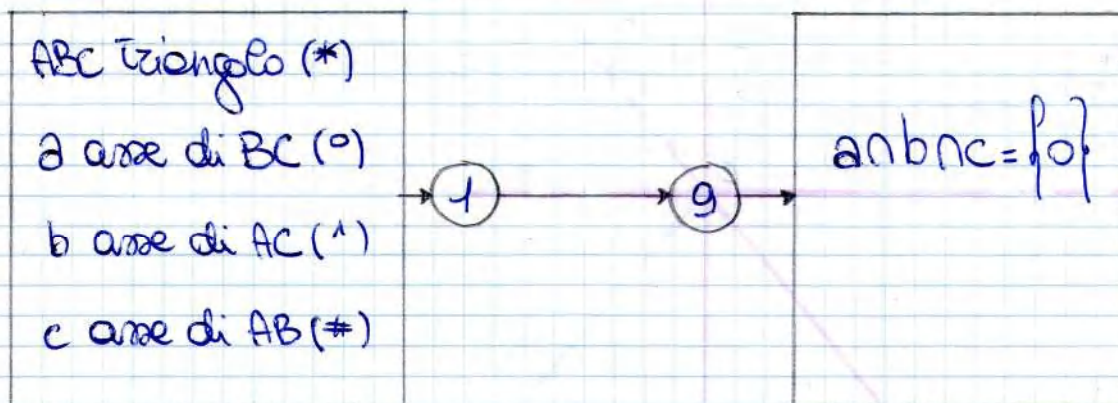
Se a, b, c sono assi di un triangolo ABC,
allora a, b, c si intersecano in un punto O

implicazione



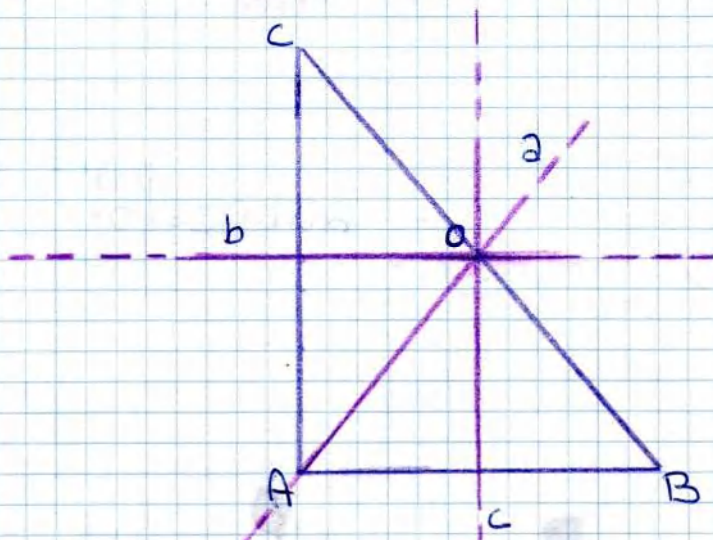
ipotesi

tesi



dimostrazione

(1) $a \perp b$	IP(*) (°) (^) TR (rette perpendicolari a questa incidente)
(2) $a \cap b = \{o\}$	(1)
(3) $o \in a$	(2)
(4) $d(o, B) = d(o, C)$	(3) IP (°) TR ASSE (è un punto appartiene all'asse all'asse...)
(5) $o \in b$	(2)
(6) $d(o, A) = d(o, C)$	(5) IP (^) TR ASSE (è un punto appartiene all'asse all'asse...)
(7) $d(o, A) = d(o, B)$	(4)(6)
(8) $o \in c$	(7) TR ASSE (è un punto è equidistante all'asse...)
(9) $a \cap b \cap c = \{o\}$	(2)(8)



TEOREMA DELLE ALTEZZE DI UN TRIANGOLO: ORTOCENTRO

ipotesi

tesi

ABC triangolo (*)
 a altezza di $[BC]$ (°)
 b altezza di $[AC]$ (°)
 c altezza di $[AB]$ (#)

1

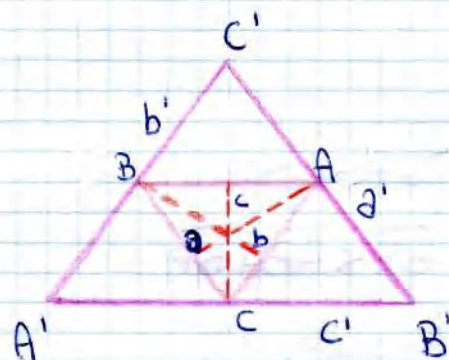
10

$a \cap b \cap c \{ O \}$
 $(O = \text{ortocentro})$

dimostrazione

(1) $a' \parallel [BC] A \in a'$
 $b' \parallel [AC] B \in b'$
 $c' \parallel [AB] C \in c'$

(2) $a' \cap b' = \{ C' \}$
 $b' \cap c' = \{ A' \}$
 $c' \cap a' = \{ B' \}$



(3) $(ABCB' \text{ parallelogramma})$
 $\wedge (AC'BC \text{ parallelogramma})$

(1)

(4) $(d(A, B') = d(B, C)) \wedge (d(A, C') = d(B, C))$ (3) TR (prop. parallelogramma
 se due lati sono opposti
 allora sono isometrici)

(5) $d(A, B') = d(A, C')$

(4)

(6) A medio $[B', C']$

(5)

(7) $a \perp B'C'$

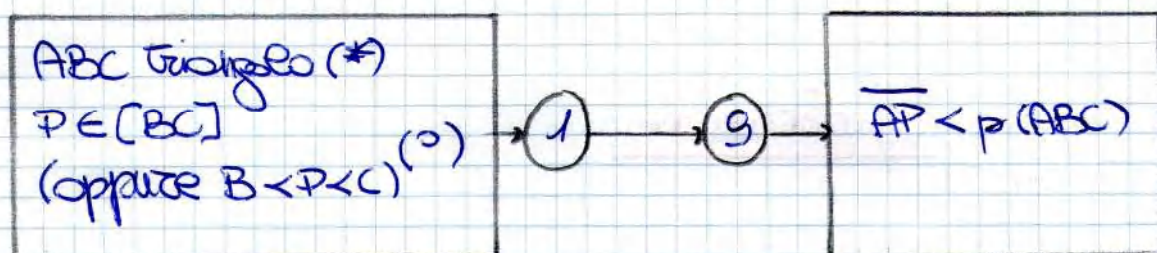
(1) IP (°) TR (se una retta
 è perpendicolare ad
 un'altra allora...)

(8)	$a \text{ and } [B'C']$	(6)(7)
(9)	$b \text{ and } [A'C'] \wedge c \text{ and } [A'B']$	idem IP(1)(#)
(10)	$a \cap b \cap c = \{0\}$	(8)(9) TR and triang

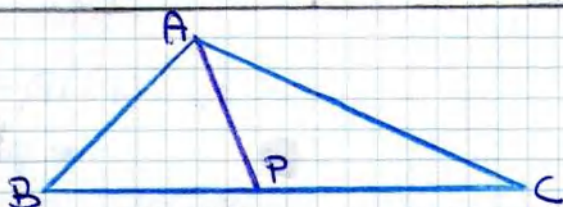
TEOREMA PUNTO SU UN LATO

ipotesi

tesi



(1)	$\neg(A < P < B)$	costruzione
(2)	$\overline{AP} < \overline{AB} + \overline{BP}$	(1) ASD
(3)	$\neg(A < P < C)$	IP (*) (0)
(4)	$\overline{AP} < \overline{AC} + \overline{PC}$	(3) ASD
(5)	$\overline{AP} + \overline{AP} < (\overline{AB} + \overline{BP}) + (\overline{AC} + \overline{PC})$	(2)(4) comp + con <
(6)	$2\overline{AP} < \overline{AB} + \overline{AC} + (\overline{BP} + \overline{PC})$	(5)
(7)	$2\overline{AP} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$	(6) IP(0) ASD
(8)	$2\overline{AP} < p(ABC)$	(7)
(9)	$\overline{AP} < p(ABC)$	(8) comp + con <



ORDINAMENTO LINEARE

- ASSIOMA ORDINAMENTO LINEARE -

PRECEDE ($<$)

SEGUE ($>$)

ORDINAMENTI STRETI

$$\forall A \neg(A < A)$$

$$\forall A \forall B (A < B \rightarrow \neg(B < A))$$

$$\forall A \forall B \forall C ((A < B) \wedge (B < C) \rightarrow A < C)$$

ORDINAMENTI INVERSI

$$\forall A \forall B (A < B \rightarrow B > A)$$

ORDINAMENTI TOTALI

$$\forall A \forall B (A < B \vee A > B \vee A = B)$$

ORDINAMENTI DENSI

ad ogni coppia
appartengono
infiniti punti

$$\forall A \forall B (A < B \rightarrow \exists C (A < C < B))$$

SENZA MAX SENZA MIN

$$\forall A \exists P (P < A) \text{ no minimo}$$

$$\forall A \exists P (A < P) \text{ no massimo}$$

- SEGMENTO CHIUSO

$$[AB] = \{P \in \Pi \mid A \leq P \leq B\}$$

SEGMENTO APERTO-

$$]AB[= \{P \in \Pi \mid A < P < B\}$$

SEMIRETTA CHIUSA

$$[AP) = \{P \in r \mid A \leq P\}$$

SEMIRETTA APERTA -

$$]AP) = \{P \in r \mid A < P\}$$

MISURE LINEARI

- ASSIOMA DISTANZA -

$$\Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(AB) \mapsto d(A, B)$$

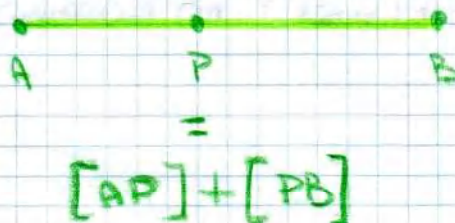
$$1) d(A, B) = d(B, A)$$

$$2) d(A, B) = 0 \iff A = B$$

$$3) A \leq P \leq B \iff d(A, B) = d(A, P) + d(P, B)$$

$$4) \neg(A \leq P \leq B) \iff d(A, B) < d(A, P) + d(P, B)$$

3.1) NB: non posso ottenere un triangolo se la somma di due lati non è maggiore della lunghezza del terzo.



- M MEDIO DI (A, B) -

$$A < M < B \wedge d(A, M) = d(M, B)$$

- MISURA DI $[AB]$ $(\overline{AB})$ (mAB) -

$$d(A, B)$$

- ASSIOMA SU UNA RETTA CON ORIGINE O -

d'ascissa è un numero reale che definisce
un punto su una retta.

$$r_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto x(P)$$



$$x(P) = -d(P, O)$$



$$x(P) = d(P, O)$$

- ASSIOMA RETTA NUMERICA -

$$r_0 \xleftrightarrow{x} \mathbb{R}$$

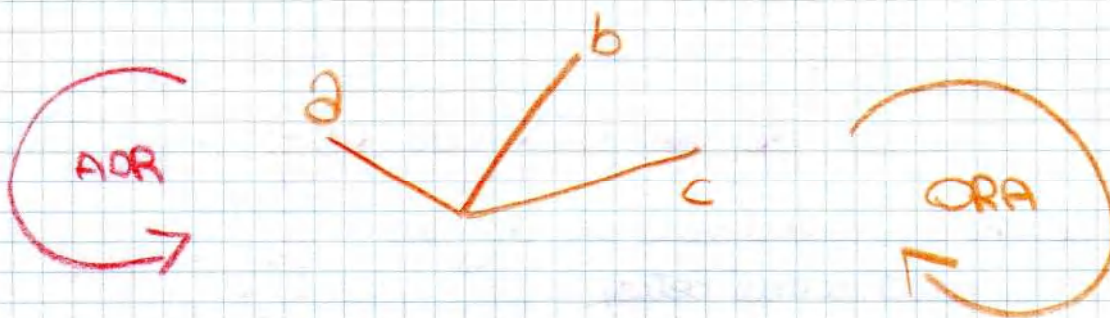
Per ogni punto un numero

Per ogni numero un punto

- COERENZA ORDINAMENTO LINEARE E NUMERICO -

$$A \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} B \iff x(A) \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} x(B)$$

ORDINAMENTO CIRCOLARE



- ASSIOMA ORDINAMENTO CIRCOLARE -

ANTIORARIO (AOR)

ORARIO (ORA)

ORDINAMENTI CIRCOLARI

$$(a, b, c)_{ORA} \leftrightarrow (b, c, a)_{ORA} \leftrightarrow (c, a, b)_{ORA}$$

$$(a, c, b)_{AOR} \leftrightarrow (c, b, a)_{AOR} \leftrightarrow (b, a, c)_{AOR}$$

ORDINAMENTI INVERSI

$$(a, b, c)_{ORA} \leftrightarrow (c, b, a)_{AOR}$$

ORDINAMENTI TOTALI

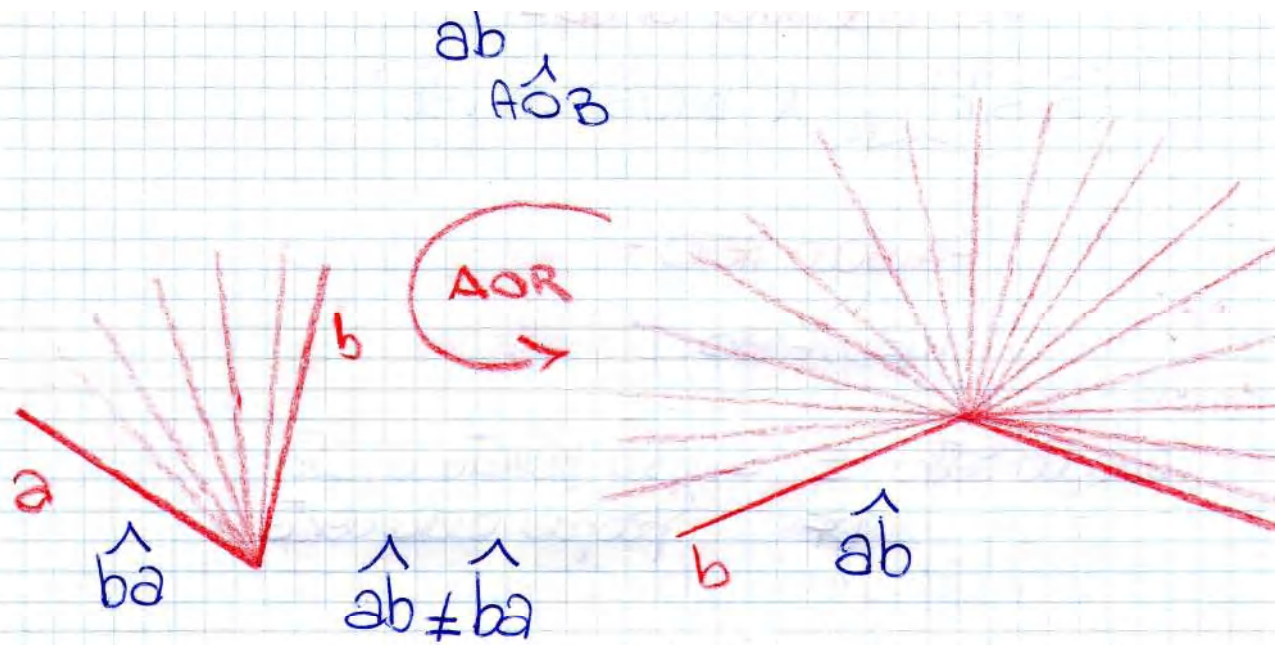
$$(a, b, c)_{ORA} \text{ aut } (a, b, c)_{AOR}$$

ORDINAMENTI DENS

$$\forall a \forall b \exists x (a, x, b)_{ORA}$$

$$\forall a \forall b \exists x (a, x, b)_{AOR}$$





- ANGOLO -

$$\hat{ab} = \{x(a, x, b) \mid x \in \text{AOR}\} \cup \{a, b\}$$

MISURE ANGOLARI

- ASSIOMA GONIOMETRO -

$$\begin{array}{l} \text{ANG } \xrightarrow{m} [0, 360[\\ \hat{ab} \xrightarrow{\quad} m(\hat{ab}) \end{array}$$

- 1) $m(\hat{ab}) = 0 \Leftrightarrow a = b$
(vale anche per 360)
- 2) $m(\hat{ab}) = 180 \Leftrightarrow ab$ opposte
- 3) $m(\hat{ab}) + m(\hat{ba}) = 360$
- 4) $(a, b, c) \text{ AOR} \Leftrightarrow m(\hat{ab}) + m(\hat{bc}) = m(\hat{ac})$
- 5) $\forall a \forall \alpha \in [0, 360[(\exists ! b (m(\hat{ab}) = \alpha))$

- S BISETRICE DI $\widehat{ab}$ -

$$(a, s, b)_{ACR} \wedge m(\widehat{as}) = m(\widehat{sb})$$

- ANGOLO RETTO -

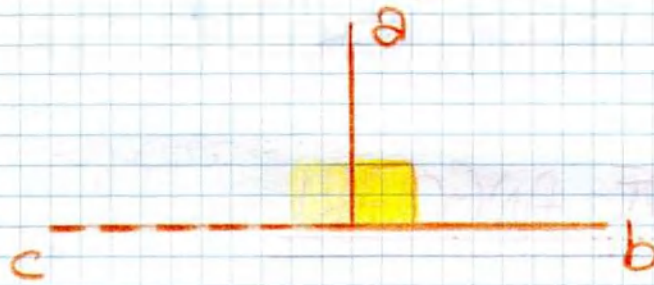
$$m(\widehat{ab}) = 90$$

angolo retto = angolo isometrico al
DF proprio adiacente

consecuturo: l'uno dopo l'altro

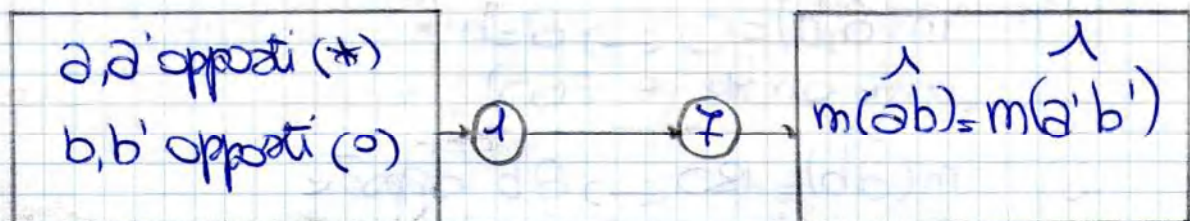
adiacente: consecuturi con lato in comune

di conseguenza:



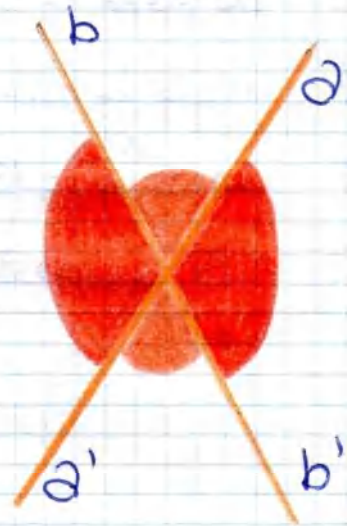
TEOREMA ANGOLI OPPOSTI ISOMETRICI

ipotesi



dimostrazione

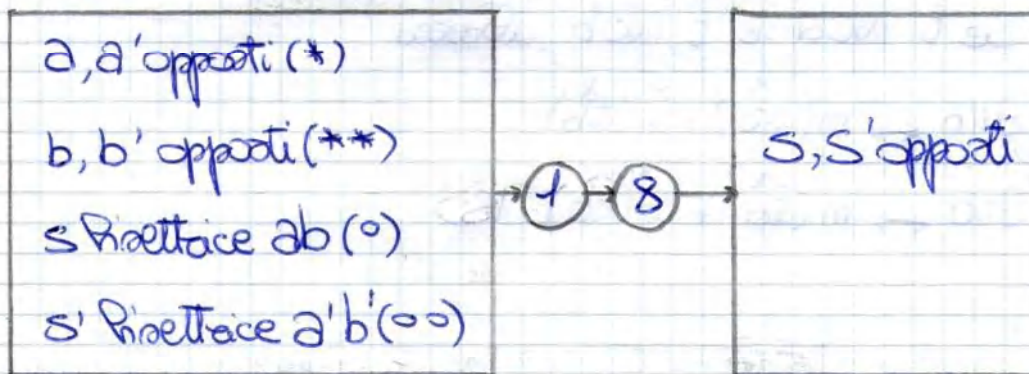
(1)	$\hat{a}b, \hat{b}a'$ adiacenti	IP (*)
(2)	$m(\hat{a}b) + m(\hat{b}a') = 180$	(1) ASG
(3)	$m(\hat{a}'b) = 180 - m(\hat{b}a')$	(2)
(4)	$\hat{b}a', \hat{a}b'$ adiacenti	IP (°)
(5)	$m(\hat{b}a') + m(\hat{a}b') = 180$	(4) ASG
(6)	$m(\hat{a}'b') = 180 - m(\hat{b}a')$	(5)
(7)	$m(\hat{a}'b') = m(\hat{a}b)$	(6)(3)



TEOREMA BISETTRICI ANGOLI OPPOSTI

ipotesi

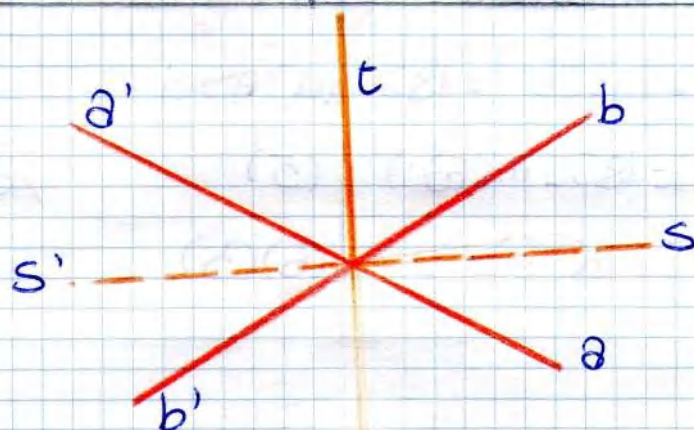
tesi



dimostrazione

(1)	t bisettrice $\hat{b}a'$	costruzione
(2)	$\hat{a}b, \hat{b}a'$ adiacenti	IP (*)
(3)	$m(\hat{st}) = 90$	(2) TR angoli bisettrici adiacenti IP (°) (1)

(4)	$\hat{ba'}, \hat{a'b'}$ adiacenti	IP(**)
(5)	$m(\hat{ts'}) = 90$	(1) TR(3) IP(0)(1)
(6)	$m(\hat{st}) + m(\hat{ts'}) = 90 + 90$	(3)(5) prop. uguaglianza
(7)	$m(\hat{s, s'}) = 180$	IP(0) AS G
(8)	S, S' opposti	(7) AS G



- CRITERI PARALLELISMO -

Se $t \parallel a$ e $t \parallel b$ allora

$$1) a \parallel b \iff m(\hat{at}) = m(\hat{tb})$$

$$2) a \parallel b \iff m(\hat{at}) + m(\hat{tb}) = 180$$

ipotesi

$a \parallel b$
 $t \parallel a$
 $t \parallel b$

①

③

tesi

$$m(\hat{at}) + m(\hat{tb}) = 180$$

RETTE PERPENDICOLARI

- 2 PERPENDICOLARE A b ($a \perp b$)-

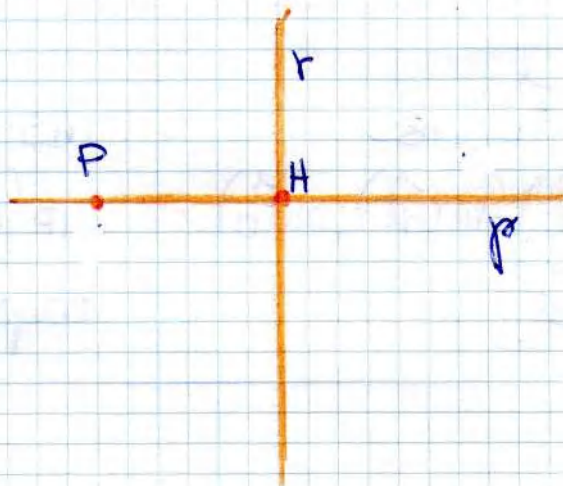
$$m(\hat{a}b) = 90$$

- ASSIOMA PERPENDICOLARE -

$$\forall r \forall p (\exists! (e \cap p \in p))$$

- H PROIEZIONE ORTOGONALE DI P SU p -

$$H \in r \vee (PH) \perp r$$



- DISTANZA PUNTO - RETTA ($d(P, r)$)-

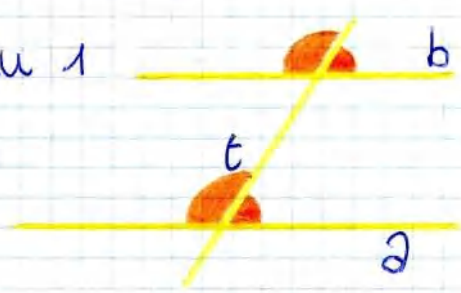
$$d(P, H)$$

- 2 ASSE DI (A, B)-

$$a \perp AB \wedge M \in a$$

(M medio di (A, B))

dimostrazione

(1)	$m(\hat{a}t) = m(\hat{b}t)$	CR PARAU 1	
(2)	$m(\hat{b}t) + m(\hat{t}b) = 180$	AS G	
(3)	$m(\hat{a}t) + m(\hat{t}b) = 180$	(1)(2)	

ipotesi

$$m(\hat{a}t) + m(\hat{t}b) = 180$$

1

3

tesi

$$a \parallel b$$

dimostrazione

(1)	$m(\hat{b}t) + m(\hat{t}b) = 180$	AS G
(2)	$m(\hat{b}t) + m(\hat{t}b) = m(\hat{a}t) + m(\hat{t}b)$	IP (1)
(3)	$m(\hat{b}t) = m(\hat{a}t)$	comp + con =

TEOREMA PERPENDICOLARI

$$1) a \perp p \wedge b \perp p \rightarrow a \parallel b$$

$$2) a \parallel b \wedge p \perp a \rightarrow p \perp b$$

$$3) a \perp b \wedge a' \perp a \wedge b' \perp b \rightarrow a' \perp b'$$

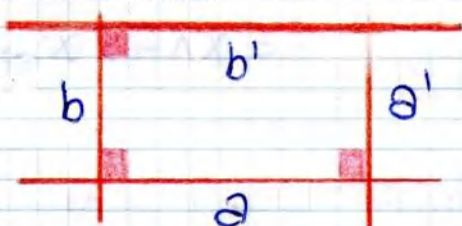
ipotesi

$$a \perp b \wedge a' \perp a \wedge b' \perp b$$

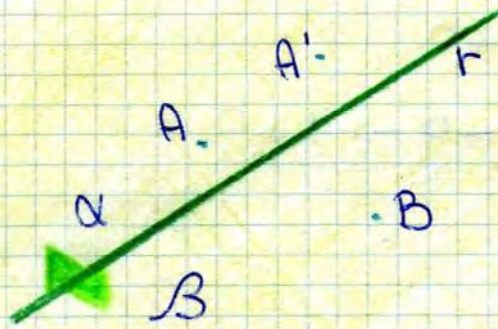
tesi

$$a' \perp b'$$

dimostrazione

(1)	$a \parallel b'$	TR 1	
(2)	$a' \perp b'$	TR 2	

POLIGONI



r = origine del semipiano

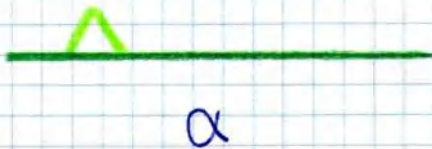
- ASSIOMA SEMIPIANO -

$$\forall r (\exists \alpha \exists \beta (\alpha \cup \beta = \pi - r \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset))$$

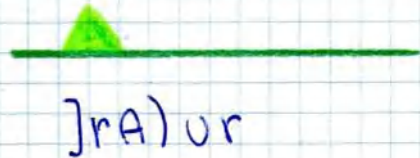
$$A \in \alpha \wedge B \in \beta \rightarrow [AB] \cap r = \emptyset$$

$$A \in \alpha \wedge A' \in \alpha \rightarrow \neg ([AA'] \cap r)$$

- SEMIPIANO APERTO $]rA)$

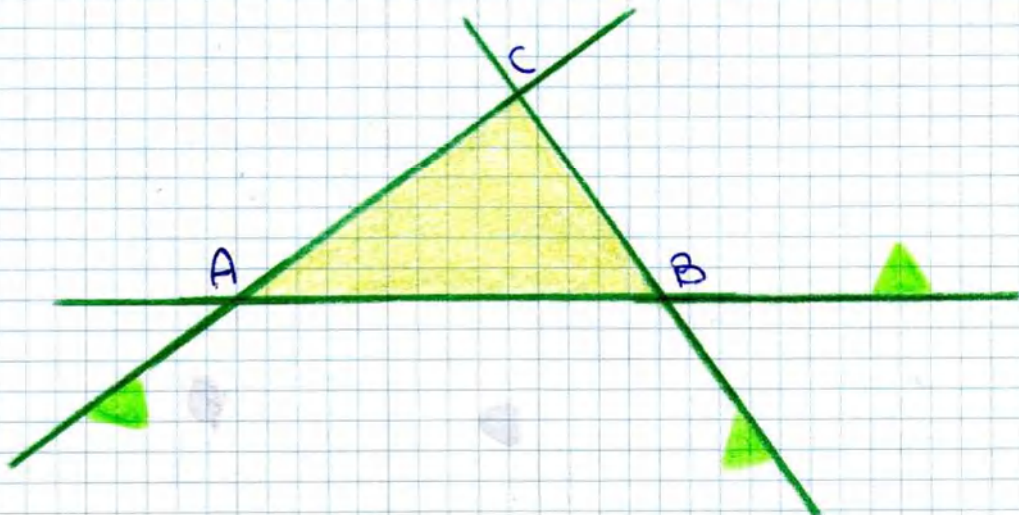


SEMIPIANO CHIUSO $[rA)$



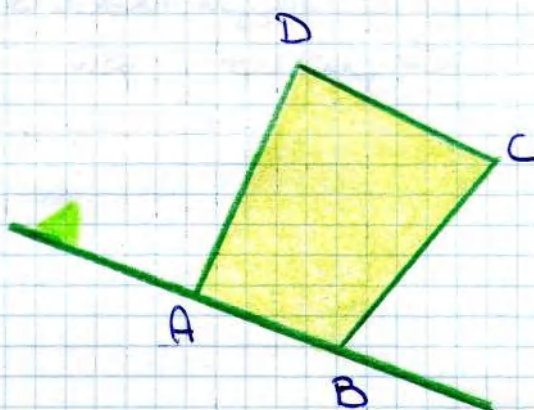
- TRIANGOLO -

$$ABC = (AB) \cap (BC) \cap (CA)$$



- QUADRILATERO CONVESSO -

$$ABCD = (AB)C \cap (BC)D \cap (CD)A \cap (DA)B$$

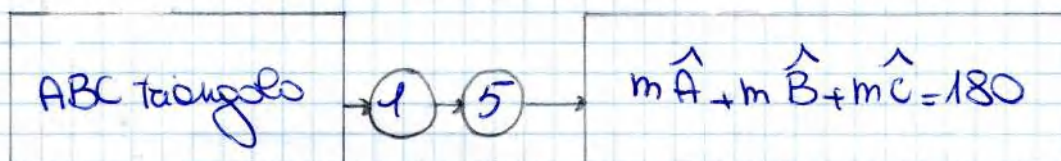


- TEOREMA ANGOLI DI TRIANGOLO -

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180$$

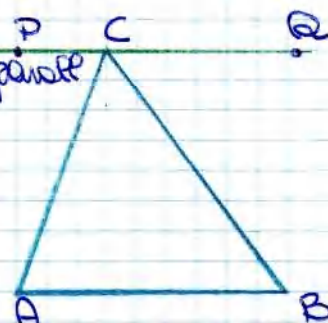
ipotesi

tesi



dimostrazione

(1)	$(PQ) \parallel (AB) \wedge C \in (PQ)$	costruzione
(2)	$m\hat{BCQ} = \hat{CA} \quad m\hat{ACP} = \hat{CB}$	IP (1) TR parallela
(3)	$m\hat{PCQ} = m\hat{BCQ} + m\hat{C} + m\hat{ACP}$	(1) AS G
(4)	$m\hat{PCQ} = 180$	(2) (3)
(5)	$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180$	(4) (1) AS G



- TEOREMA ANGOLI DI POLIGONO CON n L

$$m\bar{A}_1 + m\bar{A}_2 + \dots + m\bar{A}_n = (n-2) \cdot 180$$

somma angoli interni di un
poligono con n lati

TR1: Se P appartiene alla bisettrice,
allora P è equidistante dai lati.



TR2: Se P è equidistante
allora P appartiene alla bisettrice.

cioè:

la bisettrice è il luogo geometrico
dei punti equidistanti dai lati
dell'angolo.

TEOREMA PERPENDICOLARI

$$1) a \perp p \wedge b \perp p \rightarrow a \parallel b$$

$$2) a \parallel b \wedge p \perp a \rightarrow p \perp b$$

$$3) a \perp b \wedge a' \perp a \wedge b' \perp b \rightarrow a' \perp b'$$

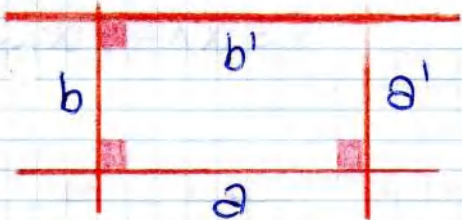
ipotesi

$$a \perp b \wedge a' \perp a \wedge b' \perp b$$

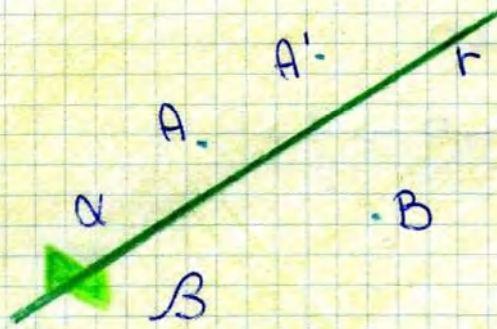
tesi

$$a' \perp b'$$

dimostrazione

(1)	$a \parallel b'$	TR 1	
(2)	$a' \perp b'$	TR 2	

POLIGONI



r = origine del semipiano

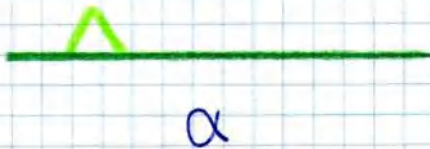
- ASSIOMA SEMIPIANO -

$$\forall r (\exists \alpha \exists \beta (\alpha \cup \beta = \Pi - r \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset))$$

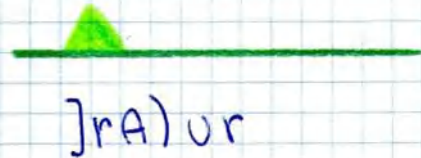
$$A \in \alpha \wedge B \in \beta \rightarrow [AB] \cap r = \emptyset$$

$$A \in \alpha \wedge A' \in \alpha \rightarrow \neg ([AA'] \cap r)$$

- SEMIPIANO APERTO $]rA)$

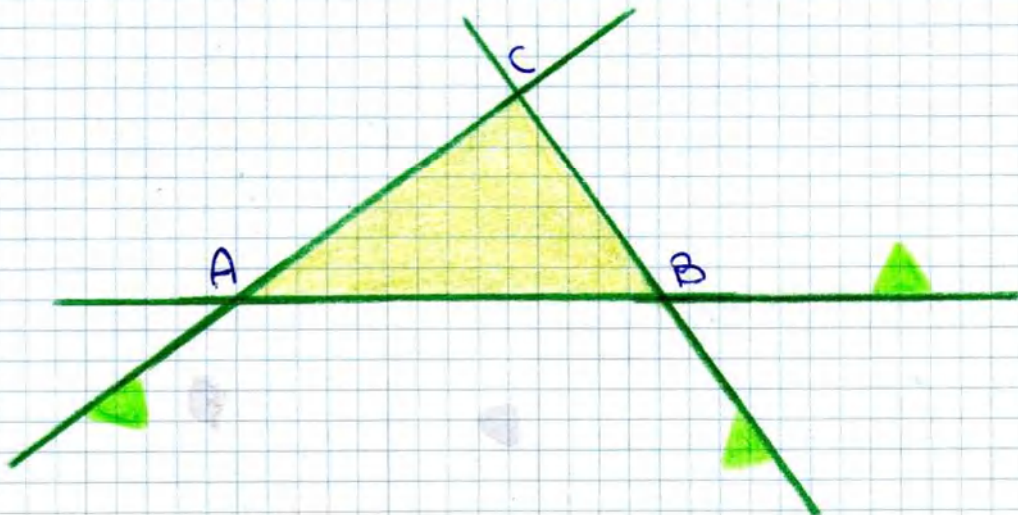


- SEMIPIANO CHIUSO $[rA)$

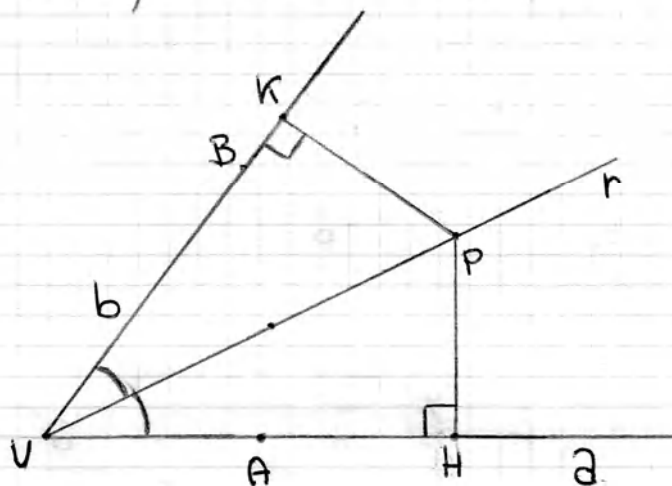


- TRIANGOLO -

$$ABC = (AB) \cap (BC) \cap (CA)$$



UNCIATO: Se P appartiene alla bisettrice,
allora è equidistante dai lati.



IP: r bisettrice $\angle b$ ($^\circ$)
 $P \in r$ ($\neq$)

TS: $d(P, H) = d(P, K)$

DIMOSTRAZIONE

(1) $PH \perp a$
 $PK \perp b$

costruzione

(2) $m(\hat{a}r) = m(\hat{r}b)$

IP ($^\circ$) ($\neq$)

(3) $m(\hat{P}HV) = 90$
 $m(\hat{V}KP) = 90$

(1)

(4) $m(\hat{P}HV) = m(\hat{V}KP)$

(3)

(5) $VHP = \text{triangolo}$
 $VKP = \text{triangolo}$

(1)

(6) $VHP \cong VKP$

(4) (2) TR triangoli

(*) $\overline{PH} = \overline{PK}$

(6) (1) 1 lato e 2 angoli
isometrici