Fondamenti di Automatica - Formulario

Alberto Giacalone

12 giugno 2020

1 Sistemi linerari e non lineari

Sistema TC: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \text{ Equazione di stato} \\ y = g(x,u) \text{ Trasformazione di uscita} \end{cases}$ Sistema TD: $\begin{cases} x(k+1) = f(x,u) \\ y(k) = g(x,u) \end{cases}$

1.1 Equilibrio

$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u}) = 0 \text{ (zeri della funzione)} \\ \bar{y} = g(\bar{x},\bar{u}) \end{cases}$

Sistemi TC LTI: $\begin{cases} \bar{x} = A^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} = [-CA^{-1}B + D]\bar{u} \end{cases}$ Sistemi TD LTI: $\begin{cases} \bar{x} = (I-A)^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} = [-C(I-A)^{-1}B + D]\bar{u} \end{cases}$

1.2 Movimento

Sistemi TC LTI: $\begin{cases} x(t) = x_o e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Cx + Du \end{cases}$ Sistemi TD LTI: $\begin{cases} x(k) = x_o A^k + \sum A^{k-h+1}Bu(h) \\ y(k) = Cx + Du \end{cases}$

Il modo dominante è quello il cui contributo si esaurisce più lentamente.

1.3 Stabilità

Si dice regione di attrazione l'insieme di stati iniziali che generano movimenti perturbati convergenti asintoticamente allo stato di equilibrio.
Sistemi NLTI:

- Analisi del movimento perturbato: fissato $\epsilon > 0$ si perturba la condizione iniziale. Se il movimento perturbato converge all'equilibrio allora lo stato è asintoticamente stabile.
- Analisi del sistema linearizzato ($\Re(\lambda_i) < 0\,\forall i \Rightarrow$ asintotica stabilità, $\exists i : \Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ instabilità, $\exists i : \Re(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$ non si può concludere nulla)
  $\begin{cases} \delta\dot{x} = f_x|_{eq}\delta x + f_u|_{eq}\delta u \\ \delta y = g_x|_{eq}\delta x + g_u|_{eq}\delta u \end{cases}$
- Studio grafico della funzione $f(x,\bar{u})$: il segno della funzione permette di capire come si comporta il movimento perturbato.

Sistemi LTI:

- Criterio degli autovalori:
  $\Re(\lambda_i) < 0, \forall i \Leftrightarrow$ asintotica stabilità.
  $\exists i : \Re(\lambda_i) > 0$ oppure $\exists i : \Re(\lambda_i) = 0$ non regolare $\Rightarrow$ instabilità.
  $\Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i$ e $\exists i : \Re(\lambda_i) = 0$ tutti regolari $\Rightarrow$ semplice stabilità.
- Tr(A) $\geq 0 \Rightarrow$ Instabilità.
- $\det A = 0 \Rightarrow$ Instabilità.
- Criterio di Routh:
  Per sistemi di ordine 1 e 2: α_i concordi $\neq 0 \Leftrightarrow$ asintotica stabilità.
  Per sistemi di ordine qualsiasi: elementi della prima colonna della tabella di Routh concordi $\neq 0 \Leftrightarrow$ asintotica stabilità.

Si noti che il criterio degli autovalori può essere esteso ai sistemi a tempo discreto sostituendo $\Re(\lambda_i)$ con $|\lambda_i|$ e confrontandolo con 1 al posto di 0.

2 Analisi nel dominio della trasformata Zeta

$v(k) \Longleftrightarrow V(z) = \mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \cdot z^{-k}$
Teorema del valore iniziale: Data $V(z)$, allora $v(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)V(z)$.
Teorema del valore finale: Data $V(k)$ razionale fratta con |poli| < 1 o in $z = 1$, allora $v(0) = \lim_{z\to\infty} V(z)$.

3 Analisi nel dominio della trasformata di Laplace

$f(t) \Longleftrightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$
Teorema del valore iniziale: Data $F(s)$ razionale fratta con $r \geq 1$, allora $f(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$.
Teorema del valore finale: Data $F(s)$ razionale fratta con $\Re(\text{poli}) < 0$ o in $s = 0$, allora $f(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$.
Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod(1 + \tau_i s)}{\prod(1 + T_i s)} \frac{\prod(1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod(1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

μ	*guadagno*	$\mathbb{R}$
g	*tipo*	$\mathbb{Z}$
τ_i, T_i	*costanti di tempo*	$\mathbb{R} - \{0\}$
ζ_i, ξ_i	*coefficienti di smorzamento*	$\lvert\cdot\rvert < 1$
α_{ni}, ω_{ni}	*pulsazioni naturali*	$\mathbb{R}^+$

3.1 Sistemi interconnessi

Serie	$\lambda_i(A) = \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)$	$G(s) = G_1 \cdot G_2$
Parallelo	$\lambda_i(A) = \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)$	$G(s) = G_1 + G_2$
Retroazione	$\lambda_i(A) \neq \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)$	$G(s) = \frac{Linea\ di\ andata}{1+FdT\ anello}$

3.2 Risposta allo scalino

Studio della risposta:

1 ordine	$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}$	$y(t) = \mu(1 + e^{-t/T})$
2 ordine con poli reali distinti	$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$T_1 \backsimeq T_2 \Rightarrow$ 2 poli coincidenti - $T_1 \gg T_2 \Rightarrow$ 1 polo
2 ordine con poli reali coincidenti	$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$	derivata prima non nulla
2 ordine con poli complessi coniugati	$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$T = \frac{1}{\xi\omega_n}$ $T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$
2 ordine - effetto degli zeri	$\tau < 0 \Rightarrow$ sottoelongazione	$\tau \gg T_1 > T_2 \Rightarrow$ sovraelongazione

In un sistema LTI AS con grado relativo r, la prima derivata non nulla in $t = 0$ è quella di ordine pari a r.
Approssimazione a poli dominanti le caratteristiche macroscopiche della risposta sono associate ai poli più lenti (ovvero più vicini all'asse immaginario). Vanno mantenuti guadagno e grado relativo originali, oltre agli zeri in posizioni critiche.

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{\mu}}{1 + s\tilde{T}} \text{ e } \tilde{\mathrm{G}} = \frac{\tilde{\mu}}{1 + 2\tilde{\xi}\mathrm{s}/\omega_\mathrm{n} + \mathrm{s}^2/\omega_\mathrm{n}^2}$$

3.3 Risposta ad ingressi esponenziali

Dato un sistema LTI con ingresso $u(t) = e^{\lambda t}, \lambda \notin \lambda_i(A)$ allora esistono condizioni iniziali per le quali stato ed uscita sono esponenziali. $y = G(\lambda)e^{\lambda t}$.
Se $u(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda = z_i$ allora $y(\infty) = 0$: lo zero si dice **bloccante**.

3.4 Risposta ad ingressi sinusoidali

Dato un sistema LTI AS con funzione di trasferimento $G(s)$ e $u(t) = U\sin(\omega_0 t + \varphi)$ allora
$y(t) = Y\sin(\omega_0 t + \Psi)$ con $Y = U|G(j\omega_0)|$ e $\Psi = \varphi + \measuredangle\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega_\mathrm{o})$.

3.5 Diagrammi di Bode

Pendenza iniziale del modulo: $\begin{cases} -g \text{ (interseca } \omega = 1 \text{ in } |\mu|_{dB}) & \text{se } g \neq 0 \\ 0 \text{ (ordinata } |\mu|_{dB}) & \text{se } g = 0 \end{cases}$

Fase iniziale: $\begin{cases} -g90° & \text{se } \mu > 0 \\ -g90° - 180° & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$

In corrispondenza delle singolarità la pendenza cambia:

Singolarità	Modulo	Fase
zero sx	↗	↗
zero dx	↗	↘
polo sx	↘	↘
polo dx	↘	↗

Nota: Nel caso di poli complessi coniugati con $\xi \leq 0.7$ si ha un picco di risonanza di modulo $\frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$

4 Sistemi di controllo

4.1 Stabilità

Criterio di Nyquist Sia P il numero di poli di $L(s)$ con parte reale positiva e N il numero di giri attorno al punto -1 del diagramma di Nyquist. Allora $N = P \iff$ Sistema AS.
Estensione Prendendo $L(s) = \mu \cdot \tilde{L}(s)$ si contano i giri attorno al punto $-\frac{1}{\mu}$.
Corollario del piccolo guadagno Data $L(s)$ AS con $|L(j\omega)| < 1, \forall\omega \iff$ Sistema retroazionato AS.
Corollario della piccola fase Data $L(s)$ AS con $|\measuredangle L(j\omega)| < 180°, \forall\omega \iff$ Sistema retroazionato AS.

Margine di guadagno $k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}, \measuredangle L(j\omega_\pi) = -180°$. *Detto A il punto in cui il diagramma di Nyquist taglia l'asse reale negativo, a è il suo modulo.* Indica la massima variazione di μ che preserva la AS in anello chiuso.
Margine di fase $\varphi_m = 180 - |\varphi_c|, \varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c), |L(j\omega_c)| = 1$. *Detto C il punto in cui il diagramma di Nyquist taglia la circonferenza unitaria, φ_c è la sua fase.* Indica il ritardo massimo che preserva la AS in anello chiuso. In generale $\tau = \frac{\varphi_m \pi}{180° \omega_c}$

Criterio di Bode Sia $P = 0$ e $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a 0_{dB}, allora $\mu > 0, \varphi_m > 0° \iff$ Sistema AS.

4.2 Prestazioni

$S(s) = \frac{1}{1+L}$	Funzione di sensitività	$d \to y$	$y^o \to e$	$d \to y$
$F(s) = \frac{L}{1+L}$	Funzione di sensitività complementare	$y^o \to y$	$-n \to y$	$n \to e$
$Q(s) = \frac{R}{1+L} = RS$	Funzione di sensitività del controllo	$y^o \to u$	$-n \to u$	$-d \to u$

4.2.1 Prestazioni statiche

Le prestazioni statiche riguardano il comportamento a regime del sistema.
Per ingressi canonici:

- $S(s)$: Vale il **principio del modello interno**: se la FdT d'anello ha tipo g almeno pari a quello dell'ingresso y^o, allora l'errore a regime è nullo. $y^o = A, t \geq 0 \Rightarrow e_\infty = \begin{cases} A & g < 0 \\ A/(1+\mu) & g = 0 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$.
- $F(s)$: L'errore è limitato solo se il disturbo è uno scalino. $n = A, t \geq 0 \Rightarrow e_\infty = \begin{cases} 0 & g < 0 \\ A\mu/(1+\mu) & g = 0 \\ A & g > 1 \end{cases}$.

Per ingressi sinusoidali:

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+L} \simeq \begin{cases} \frac{1}{L} & |L| > 1 \cup \omega < \omega_c \\ 1 & |L| < 1 \cup \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$F(j\omega) = \frac{L}{1+L} \simeq \begin{cases} 1 & |L| > 1 \cup \omega < \omega_c \\ L & |L| < 1 \cup \omega > \omega_c \end{cases}$$

S si comporta come filtro passa-alto con banda passante $[\omega_c, +\infty]$.
F si comporta come filtro passa-basso con banda passante $[0, \omega_c]$.

4.2.2 Prestazioni dinamiche

Le prestazioni dinamiche riguardano il comportamento in transitorio del sistema. Si usa un approssimazioni a poli dominanti.

$\boxed{\varphi_m \geq 75°}$

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

$\xi = 1$
$T_a = 5/\omega_c$
$S_\% = 0$
$\mu_F = \begin{cases} \mu_L/(1+\mu_L) & g_L = 0 \\ 1 & g_L > 0 \end{cases}$

$\boxed{\varphi_m < 75°}$

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F \omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$$

$\xi = \varphi_m/100, \omega_n = \omega_c$
$T_a = 5/(\xi\omega_n)$
$S_\% = 100 e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$
$\mu_F = \begin{cases} \mu_L/(1+\mu_L) & g_L = 0 \\ 1 & g_L > 0 \end{cases}$