

* Applicare il teorema di Rolle alla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & 0 \leq x < 3/2 \\ x - 5/4 & 3/2 \leq x \leq 9/4 \end{cases} \quad (a) \quad (b)$$

nell'intervallo $[0; 9/4]$

1) la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[0; 9/4]$?

la parte (a) e la parte (b) prese singolarmente sono funzioni polinomiali $\rightarrow$ quindi continue

Occorre studiare il punto di confine $x = 3/2$

Deve essere $\lim_{x \rightarrow 3/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} f(x) = f(3/2)$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} (x - 5/4) = 3/2 - 5/4 = 1/4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} (x^2 - 2x + 1) = \frac{9}{4} - 3 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$f(3/2) = 3/2 - 5/4 = 1/4$$

OK! La funzione $f(x)$ è continua in $[0; 9/4]$

2) la funzione $f(x)$ è derivabile nell'intervallo $(0; 9/4)$?

la parte (a) e la parte (b) prese singolarmente sono funzioni polinomiali $\rightarrow$ quindi derivabili.

Occorre studiare il punto di confine $x = 3/2$

Deve essere

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} (2x - 2) = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} (1) = 1$$

OK! la funzione $f(x)$ è derivabile in $(0; 9/4)$

3) la funzione $f(x)$ ha i valori agli estremi dell'intervallo uguali?
 $f(a) = f(b) = ?$ $f(0) = f(9/4) = ?$

$$f(0) = 1 \quad f(9/4) = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

OK! la funzione $f(x)$ agli estremi assume lo stesso valore

Esiste un punto c interno ad $[0; 9/4]$ per cui $f'(c) = 0$!

ALMENO

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & 0 \leq x < 3/2 \\ 1 & 3/2 \leq x \leq 9/4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x - 2 = 0 & x = 1 \\ 1 = 0 & \text{non c'è} \end{matrix}$$

$\neq c$

$c = 1$

* Per quali valori dei parametri a e b è applicabile il teorema di Rolle alla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x & -1 \leq x < 0 \\ ax^2 + bx & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

nell'intervallo $[-1; 1]$

1) la funzione $f(x)$ DEVE ESSERE CONTINUA nell'intervallo $[-1; 1]$

la parte (a) è una funzione trigonometrica elementare CONTINUA, la parte (b) è una funzione polinomiale CONTINUA, $\rightarrow$ occorre studiare solo il punto di confine.

Deve avere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + bx = 0 \quad \forall a, b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg x = 0$$

$$f(0) = 0$$

OK! la funzione $f(x)$ è CONTINUA in $[-1; 1]$ $\forall a, b$

2) la funzione $f(x)$ DEVE ESSERE DERIVABILE nell'intervallo $[-1; 1]$

la parte (a) è una funzione trigonometrica elementare quindi derivabile; la parte (b) è una funzione polinomiale quindi derivabile $\rightarrow$ occorre studiare solo il punto di confine

Deve avere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

$$f(x) = \arctg x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2ax + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$\rightarrow$ la funzione $f(x)$ è derivabile in $[-1; 1]$ quando $b = 1$

3) la funzione $f(x)$ DEVE avere i valori agli estremi dell'intervallo uguali:

$$f(a) = f(b)$$

$$f(-1) = f(1)$$

$$f(-1) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) = a + b$$

$\rightarrow$ la funzione assume gli stessi valori agli estremi quando $a + b = \frac{\pi}{4}$ $a = -\frac{\pi}{4} - b$

$$a = -\frac{\pi}{4} - 1$$