ESERCIZI ELLISSE II

① Determina la traiettoria del punto P (mobile) la cui distanza dalla retta $x=9$ è sempre il triplo della distanza dal punto $A(1,0)$.

$d(P,r) = 3 \cdot \overline{PA}$ $\quad r: x=3 \quad A(1,0)$

$$d(P,r) = \frac{|1 \cdot x_P - 9|}{\sqrt{1}} = x_P - 9$$

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+1-2x+y^2}$$

$$\Rightarrow x_P - 9 = 3\sqrt{x^2+1-2x+y^2} \rightarrow (x_P-9)^2 = 9\,(x^2+9-18x+9y^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+81-18x = 9x^2+9-18x+9y^2 \rightarrow 8x^2+9y^2-72=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$$

② Determina le coordinate dei punti di intersezione dell'ellisse sull'asse x i cui assi misurano $2\sqrt{52}$ e $2\sqrt{13}$, con la retta $x-2y+2=0$

$2a = 2\sqrt{52} \rightarrow a^2 = 52$

$2b = 2\sqrt{13} \rightarrow b^2 = 13$

$$\rightarrow \frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1 \rightarrow 13x^2+52y^2=676$$

$$\begin{cases} 13x^2+52y^2=676 \\ x=2y-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13(4y^2+4-8y)+52y^2-676=0 \\ \end{cases} \rightarrow$$

$$52y^2+52-104y+52y^2-676=0 \rightarrow 104y^2-104y-624=0$$

$$\rightarrow y^2-y-6=0 \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

$A(4,3)$

$B(-6,-2)$

③ Data l'ellisse $9x^2+25y^2=225$ e la retta $y=-\frac{x}{2}$, determina la misura della corda intercettata sulla retta dall'ellisse.

$$\begin{cases} 9x^2+25y^2=225 \\ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x^2+25\left(\frac{x^2}{4}\right)=225 \end{cases} \rightarrow 36x^2+25x^2-900=0 \rightarrow$$

$$61x^2=900 \quad x_{12}=\pm\frac{30}{\sqrt{61}} \qquad A\left(\frac{30}{\sqrt{61}};-\frac{15}{\sqrt{61}}\right) \quad B\left(-\frac{30}{\sqrt{61}};\frac{15}{\sqrt{61}}\right)$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{30}{\sqrt{61}}+\frac{30}{\sqrt{61}}\right)+\left(-\frac{15}{\sqrt{61}}-\frac{15}{\sqrt{61}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{60}{\sqrt{61}}\right)^2+\left(-\frac{30}{\sqrt{61}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3600}{61}+\frac{900}{61}}=\frac{\sqrt{4500}}{\sqrt{61}}=\frac{30\sqrt{5}}{\sqrt{61}}$$

④ Data l'ellisse $x^2+4y^2=4$, calcola l'area del rettangolo che ha i vertici sui punti d'intersezione dell'ellisse con le bisettrici dei quadranti.

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+4x^2=4 \end{cases} \rightarrow 5x^2=4 \rightarrow x_{12}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$

A $\left(\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$
B $\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)$
C $\left(+\sqrt{\frac{4}{5}};\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$
D $\left(-\sqrt{\frac{4}{5}};-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$

$$\text{Area}=\left(2\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$$

⑤ Un'ellisse ha $e=\frac{4}{5}$ e $2b=12$. Determina l'equazione della curva e trova le coordinate dei punti P e Q di intersezione tra la curva e la retta $2x-5y+2=0$

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \quad c=\frac{4}{5}a \rightarrow c^2=\frac{16}{25}a^2 \quad c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=a^2-36 \rightarrow a^2=100$

$2b=12 \rightarrow b^2=36 \qquad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

$$\begin{cases} 36x^2+100y^2=3600 \\ y=\frac{2x+2}{5} \end{cases} \rightarrow 36x^2+100\left(\frac{2x+2}{5}\right)^2=3600 \rightarrow 36x^2+16x^2+16+32x-3600=0$$

$$52x^2+32x-3600=0 \rightarrow x_{12}=\frac{-32\pm\sqrt{1024+749184}}{104} \begin{cases} 8 \\ -\frac{112}{13} \end{cases}$$

$P\left(8,\frac{18}{5}\right) \quad Q\left(-\frac{112}{13},-\frac{198}{65}\right)$