Disequazioni di secondo grado

Riccardo Bardin

Questo documento ha l'obiettivo di riassumere brevemente i metodi di risoluzione delle disequazioni di secondo grado.

1 Disequazioni di secondo grado

Le disequazioni di secondo grado si presentano sempre in una delle forme

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &> 0 \\ ax^2+bx+c &\geq 0 \\ ax^2+bx+c &< 0 \\ ax^2+bx+c &\leq 0 \end{aligned}$$

Se la disequazione in esame non si trova in questa forma, detta **forma normale**, è sempre possibile ricondurvela (per evitare di incappare in errori di intepretazione e di segno). Inoltre, per semplicità di calcolo è sempre possibile (e comodo) fare in modo che il coefficiente a sia positivo. Nel seguito quindi supporremo sempre che $a > 0$. Elenchiamo, in via del tutto formale, la soluzione delle disequazioni al variare dei parametri b e c. Questa trattazione può essere omessa in favore di un utilizzo molto più rapido della tecnica delle «parabole».

1. **Disequazioni pure.**
   La versione più semplice delle disequazioni elencate è quella in cui $b = 0, c \neq 0$. In questo caso a seconda del segno di c si possono avere i seguenti casi

   (a) $c > 0$.
   L'equazione associata $ax^2 + c = 0$ *non* ammette soluzioni reali, quindi la disequazione è sempre vera, oppure impossibile, a seconda del verso:

   $$\begin{aligned} ax^2+c &> 0 &\Rightarrow\quad& \forall x \in \mathbb{R}\ \text{(sempre vera)} \\ ax^2+c &\geq 0 &\Rightarrow\quad& \forall x \in \mathbb{R}\ \text{(sempre vera)} \\ ax^2+c &< 0 &\Rightarrow\quad& \nexists x \in \mathbb{R}\ \text{(impossibile)} \\ ax^2+c &\leq 0 &\Rightarrow\quad& \nexists x \in \mathbb{R}\ \text{(impossibile)} \end{aligned}$$

   (b) $c \leq 0$.
   L'equazione associata $ax^2 + c = 0$ ha soluzionu reali

   $$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

quindi a seconda del verso della disequazione si prenderanno *valori esterni* per $>, \geq$ e *valori interni* per $<, \leq$:

$$\begin{aligned} ax^2+c &> 0 \quad \Rightarrow \quad x<-\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x>\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ ax^2+c &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq-\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x\geq\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ ax^2+c &< 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{-\frac{c}{a}}<x<\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ ax^2+c &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{-\frac{c}{a}}\leq x\leq\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

2. **Disequazioni spurie.**
   Nel caso in cui $b \neq 0, c=0$, una soluzione dell'equazione associata è sempre $x_1=0$, mentre l'altra è $x_2=-\frac{b}{a}$. Ne deriva che le soluzioni delle disequazioni si possono scrivere in questo modo:

   (a) $b>0$

$$\begin{aligned} ax^2+bx &> 0 \quad \Rightarrow \quad x<-\frac{b}{a} \vee x>0 \\ ax^2+bx &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq-\frac{b}{a} \vee x\geq 0 \\ ax^2+bx &< 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a}<x<0 \\ ax^2+bx &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a}\leq x\leq 0 \end{aligned}$$

   (b) $b<0$x

$$\begin{aligned} ax^2+bx &> 0 \quad \Rightarrow \quad x<0x>-\frac{b}{a} \\ ax^2+bx &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq 0 \vee x\geq-\frac{b}{a} \\ ax^2+bx &< 0 \quad \Rightarrow \quad 0<x<-\frac{b}{a} \\ ax^2+bx &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0\leq x\leq-\frac{b}{a} \end{aligned}$$

3. **Disequazioni complete.**
   Nel caso generale (naturalmente i due casi precedenti rientrano in questo), una volta scritte le soluzioni dell'equazione associata con la nota formula

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   si prendono valori esterni o interni a seconda del verso della disequazione. Supponendo di denotare con x_1 la soluzione minore, cioè $x_1<x_2$, la soluzione delle disequazioni in forma elementare si può così riassumere:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &> 0 \quad \Rightarrow \quad x<x_1 \vee x>x_2 \\ ax^2+bx+c &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq x_1 \vee x\geq x_2 \\ ax^2+bx+c &< 0 \quad \Rightarrow \quad x_1<x<x_2 \\ ax^2+bx+c &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1\leq x\leq x_2 \end{aligned}$$

Quanto detto finora dal punto di vista formale, può essere reso più semplice ricordando che un'espressione del tipo

$$y=ax^2+bx+c$$

rappresenta una **parabola** nel piano cartesiano xOy (e questa parabola ha sempre la concavità rivolta verso l'alto perchè abbiamo scelto di avere sempre $a>0$: ricordare che se a dovesse essere negativo, è sempre possibile cambiare tutti i segni, e il verso della disequazione, per riportarsi alla forma normale).

- I punti in cui la parabola interseca l'asse delle x sono le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, che chiameremo x_1 e x_2.
- Chiedere che una parabola sia maggiore (o minore) di zero significa evidenziare gli archi di parabola che si trovano al di sopra (o al di sotto) dell'asse x.
- Una volta evidenziate gli archi di parabola, si scelgono quindi i valori esterni alle soluzioni x_1,x_2, oppure quelli interni, a sconda dei casi.

Esempio 1.1. Facciamo subito un esempio.

$$2x^2 - 3x - 2 > 0$$

L'equazione associata ha soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Disegnando la parabola

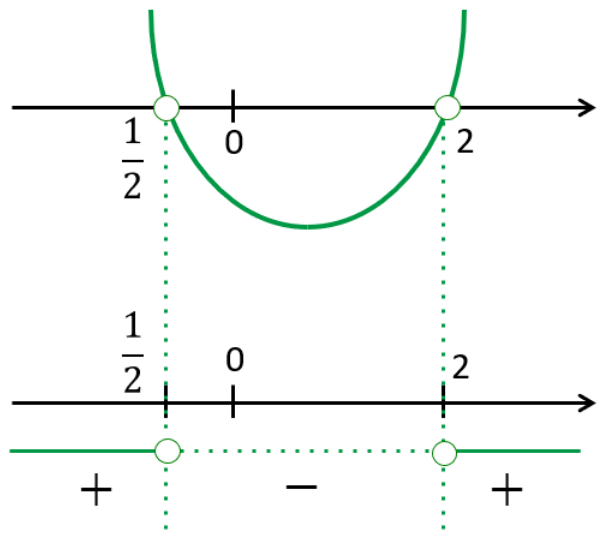

Figura 1:

vediamo subito che i valori corretti sono quelli *esterni* alle soluzioni x_1 e x_2, quindi la soluzione della disequazione si scrive

$$x < \frac{1}{2} \vee x > 2$$

o equivalentemente

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$$

Esempio 1.2. Prendiamo ora la disequazione

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Come prima, l'equazione associata ha soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Disegnando la parabola (si osservi che ora, essendoci il simbolo $\leq$, i pallini nel disegno sono pieni, per indicare che i valori estremi sono inclusi nella soluzione) si vede che stavolta l'intervallo corretto è quello che prende valori interni:

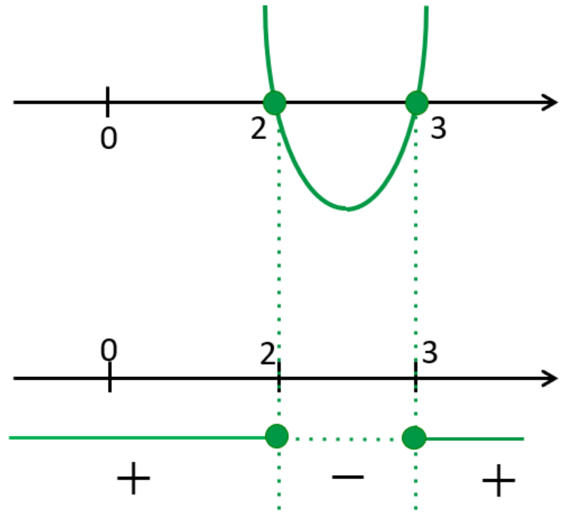

Figura 2:

$$2 \leq x \leq 3$$

che si scrive anche nella forma $[2, 3]$.