

Esercizi di Fisica Tecnica

Flavio Leo

Novembre 2024

Realizzato come dispensa di esercizi integrativi per



Linee Guida

La seguenti indicazioni vorrebbero essere una sorta di guida rapida per lo svolgimento di esercizi, di validità generale sebbene gli esempi siano basati sugli argomenti di Fisica tecnica. E fortemente consigliato applicarle, adattandole magari in parte ciascuno al proprio stile.

L'approccio generico dovrebbe essere fondato sui passi seguenti:

1. identificare il sistema fisico che si vuole descrivere;
2. convertire tale sistema reale in un modello fisico, introducendo le opportune assunzioni semplificative;
3. convertire il modello fisico in un modello matematico, costruendo un sistema di equazioni utilizzando le opportune:
 - relazioni di bilancio / conservazione (aggiungendole nel seguente ordine: massa, energia, entropia, quantità di moto, e limitandosi a quelle necessarie);
 - relazioni costitutive (ad esempio le equazioni di stato di gas o liquido/solido ideali, le relazioni sui calori specifici, ...);
 - relazioni di salto, se il sistema include interfacce;
 - condizioni al contorno e condizioni iniziali, se le precedenti includono equazioni differenziali.
4. risolvere il sistema matematico, e controllare attentamente i risultati (non solo come calcolo, ma anche in termini di consistenza con le assunzioni, confronto con altre possibili strategie risolutive, ...)

La seguente può essere una utile "check list", in particolare quando non viene in mente subito come risolvere un esercizio:

1. chiedersi su che argomento/i è l'esercizio (ad es. sistemi fluenti, aria umida, conduzione + convezione, scambiatori di calore + aria umida, ...);
2. scegliere il sistema termodinamico / i sistemi termodinamici idoneo/i a modellizzare il problema proposto e decidere in che condizioni si trova / trovano (ad es. sistema semplice o composto, chiuso o fluente, in quest'ultimo caso se sia in condizioni stazionarie o no, quanti ingressi e quante uscite, ecc...);
3. chiedersi con che sostanza/e e stato/i di aggregazione si ha a che fare, e come possano essere modellizzabili; se cioè si possano usare le approssimazioni a sostanze ideali (solidi e liquidi incompressibili, gas ideali/perfetti) oppure no (quindi ad es. dover far intervenire i coefficienti termovolumetrici);

4. chiedersi che trasformazioni subisce il sistema / i sistemi considerato/i e se possono valere opportune semplificazioni (ad es. trasformazioni politropiche, adiabatiche approssimate ad isoentropiche, ...);
5. a questo punto scriversi (davvero o mentalmente) l'insieme delle relazioni a disposizione dopo le valutazioni indicate ai punti 1-4. Sia selezionandole tra quelle specifiche della Fisica tecnica, sia tra quelle dimostrate valide da altre branche della Fisica (ad esempio leggi della dinamica, legge di Stevino, legge di Archimede, legge di Ohm, ...);
6. Questo è un punto cruciale:
 - diffidare dei ragionamenti intuitivi ed affidarsi invece ad una modellizzazione matematicamente rigorosa;
 - partire sempre dalle relazioni fondamentali di cui si è sicuri (ad es. I e II Principio, conservazione della massa, equazione generale della conduzione, equazione di Newton, ...);
 - prima di utilizzare risultati particolari, verificare con grande attenzione che valgano tutte le ipotesi che hanno permesso di ricavarli (ad es. $l \neq \Delta h$ per una turbomacchina non adiabatica);
 - scegliere una convenzione di segno ed utilizzare sempre quella;
7. procedere per quanto possibile (eccetto cioè che nei casi in cui la complessità delle equazioni diventi eccessiva) con una risoluzione algebrica, e solo alla fine (dopo aver verificato la correttezza dimensionale del risultato) sostituire i valori numerici;
8. una volta ottenuto il risultato, verificare che non contraddica le leggi fondamentali (ad es. temperature assolute negative, rendimenti maggiori di 1, entropie decrescenti per sistemi isolati, . . .) né le ipotesi fatte per ricavarla.

Infine, tre consigli che possono aiutare molto a ridurre gli errori:

1. utilizzare la convenzione scientifica : lavoro e calore considerati positivi se entranti nei sistemi;
2. ogni volta che si ha un "passaggio" (di calore, di lavoro, da ingresso ad uscita, da uno stato iniziale ad uno finale, ...) immaginare un "asse" diretto dal punto di "partenza" al punto di "arrivo" , e calcolare le variazioni sempre come "finale - iniziale" . Utilizzando la convenzione scientifica e le equazioni scritte coerentemente, questo modo di procedere "mette a posto i segni" automaticamente;
3. utilizzare per le temperature sempre la scala Kelvin, eccetto che nella trattazione dell'aria umida (oppure anche in quest'ultima, pur di ricordarsi che in questo caso nel calcolo delle entalpie compaiono i ΔT dallo 0 °C).

Consultazione delle soluzioni

Ad ogni esercizio è associata la sua soluzione, per la maggior parte espresse *anche* in linguaggio **MatLAB**: questo lascia libera facoltà al risolutore di inserire il codice nel compilatore e modificarne i parametri per osservare il cambiamento dei fenomeni presi in considerazione

Esercizio 2.1

Argomento: Apertura/chiusura del freezer

Se si apre la porta di un freezer (temperatura interna $T_1 = -18^\circ\text{C}$, superficie della porta $A = 0.25\text{ m}^2$, volume del freezer $V = 0.125\text{ m}^3$), la si lascia aperta per un breve tempo e poi la si richiude, riapirla immediatamente dopo risulta difficoltoso. Questa difficoltà non si ha se si attende un po' di tempo prima di riaprire la porta. Come mai?

SOLUZIONE:

La massa d'aria contenuta nel freezer è inizialmente a T_1 , P_{atm} ; con l'apertura della porta si ha uno scambio di aria con l'esterno, e la stessa aria che rimane nel freezer venendo a contatto con l'aria esterna si riscalda fino ad una temperatura T_2 (non coincidente con quella esterna) e quindi si dilata. Quando la porta viene richiusa, nel freezer rimane quindi intrappolata una massa d'aria M_2 minore di quella iniziale, e di conseguenza quando essa si ri-raffredda si ha una depressione all'interno del freezer rispetto all'esterno:

$$M_1 = V_1 P_{atm} / (R^* T_1)$$

$$M_2 = V_2 P_{atm} / (R^* T_2)$$

Ri-raffreddando la nuova massa d'aria fino a T_1 :

$$P_2 V_1 = M_2 R^* T_1 = V_1 P_{atm} / (R^* T_2) R^* T_1$$

$$P_2 = P_{atm} T_1 / T_2$$

La depressione tra interno del freezer ed esterno è quindi:

$$P_2 - P_1 = P_{atm} (T_1 / T_2 - 1)$$

e di conseguenza la forza che si oppone alla riapertura della porta è:

$$F = A P_{atm} (T_1 / T_2 - 1)$$

Questa forza viene poi meno mano a mano che dall'esterno filtra aria all'interno del freezer (le guarnizioni non sono a tenuta stagna)...

$$M_1 - M_2 = V_1 P_{atm} / R^* (1/T_1 - 1/T_2)$$

RISULTATI NUMERICI:

T1	255.15
P1	101325
V1	0.125

T2 [°C]	T2 [K]	P2 - P1 [Pa]	F (0.25m2)	F (kgP)	M1-M2 [g]
-18.00	255.15	0.00	0.00	0.00	0.00
-17.50	255.65	-198.17	-49.54	-5.05	0.34
-17.00	256.15	-395.57	-98.89	-10.08	0.68
-16.50	256.65	-592.20	-148.05	-15.09	1.01

-10.00	263.15	-3080.37	-770.09	-78.50	5.26
-5.00	268.15	-4912.27	-1228.07	-125.19	8.39
0.00	273.15	-6677.10	-1669.28	-170.16	11.40
5.00	278.15	-8378.48	-2094.62	-213.52	14.30
10.00	283.15	-10019.78	-2504.94	-255.35	17.10
15.00	288.15	-11604.11	-2901.03	-295.72	19.81
20.00	293.15	-13134.40	-3283.60	-334.72	22.42

Esempio calcolo del tempo necessario a raffreddare l'aria dentro un freezer e della depressione indotta dal raffreddamento

%assunzioni, oltre all'aria come gas perfetto e al contorno del freezer
%come perfettamente adiabatico:

L=0.6; %freezer cubico, con lato 0.6 m

Text=293.15; %temperatura esterna 20 °C

Pext=1e5; %P esterna 1 bar

Tint=253.15; %temperatura interna prima dell'apertura della porta

Ti=(Tint+Text)/2; %la T dell'aria dopo l'apertura e chiusura della porta sia
%la media tra quella interna e quella esterna

Qpf=200; %potenza in W (termica, frigorifera - Qpc nel gergo dei cicli) del freezer

%soluzione

A=L^2; %area porta freezer

V=L^3; %volume freezer occupato da aria

Rs=8314/29; %costante specifica dell'aria (MM = 29 J/kgK)

cv=5/2*Rs; %dopo la ri-chiusura della porta la trasformazione è isocora

%densità e massa immediatamente dopo la richiusura della porta

rho=Pext/(Rs*Ti);

M=rho*V;

Cv=M*cv; %capacità termica a v costante

%essendo DU=M cv DT e DU = Qpf*Dtau

%quanto ci si mette a riabbassare la temperatura, fino nuovamente a Tint,

%al variare del riempimento del frigo?

Tt=Ti:-1:Tint;

```

%1) riempimento 0 => tutta aria nel volume del frigo
DU_r00=Cv*(Tt-Ti);
tau_r00=-DU_r00/Qpf;

%2) riempimento 0.5 => metà aria e metà cibo (che si assume non cambi T
%all'apertura e chiusura della porta)
DU_r05=0.5*Cv*(Tt-Ti);
tau_r05=-DU_r05/Qpf;

%2) riempimento 0.1 => 0.1 aria e 0.9 cibo (che si assume non cambi T
%all'apertura e chiusura della porta)
DU_r01=0.1*Cv*(Tt-Ti);
tau_r01=-DU_r01/Qpf;

%grafico T/tau
figure; hold on;
plot(273.15-Tt,tau_r00,'r-');
plot(273.15-Tt,tau_r05,'g-');
plot(273.15-Tt,tau_r01,'b-');
xlabel('\Delta T da ottenere [K]');
ylabel('\tau [s]');
grid on;

%DP tra interno ed esterno e corrispondente forza
Pt=rho*Rs*Tt; %pressione interna
DPt=Pext-Pt; %DP tra interno ed esterno
Ft=DPt*A; %forza che si oppone all'apertura della porta
%massa che porterebbe ad una forza peso equivalente a Ft
M_equiv_t=Ft/9.81;

%grafico M equivalente/tau
figure; hold on;
plot(Tt,M_equiv_t,'r-');
xlabel('T interna [K]');
ylabel('Massa equivalente [kg]');
grid on;

%quindi ad esempio con fattore di riempimento 0.1 in circa 1 s si perdono 11 °C e
%si ha una forza "teorica" sulla porta del freezer equivalente al peso di
%una massa di 130 kg!

```

Esercizio 2.2

Argomento: Gas ideali

Una bombola di volume interno pari a $V = 200 \text{ dm}^3$ contiene ossigeno (O_2 , $M_M = 32 \text{ kg/kmol}$) a pressione $p_1 = 200 \text{ ata}$ e temperatura $T_1 = 20 \text{ °C}$. Calcolare la massa di ossigeno presente nella bombola. Se la temperatura sale a $T_2 = 60 \text{ °C}$, a che pressione arriva l'ossigeno? Infine, se dopo alcune ore di utilizzo a T costante della bombola la pressione dell'ossigeno è dimezzata, quanto ossigeno è stato consumato?

Cosa sarebbe cambiato se invece che ossigeno la bombola avesse contenuto una quantità di azoto (N_2 , $M_M = 28 \text{ kg/kmol}$) sufficiente a garantire la stessa pressione iniziale?

SOLUZIONE:

Dall'equazione di stato dei gas ideali è possibile ricavare direttamente la massa di ossigeno contenuta inizialmente nella bombola: $M = (p_1 \cdot V)/(R^* \cdot T_1)$

Se la temperatura sale a 60 °C, tra stato 1 e 2 V , M e R^* non cambiano.

Per entrambi gli stati è quindi possibile scrivere, dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$V/(M \cdot R^*) = T_1/p_1 \quad \text{e} \quad V/(M \cdot R^*) = T_2/p_2$$

uguagliando le due relazioni si ottiene: $p_2/p_1 = T_2/T_1$

da cui si ricava la pressione dello stato 2: $p_2 = p_1 \cdot (T_2/T_1)$

Se dopo l'utilizzo, ipotizzando che la T non cambi durante lo stesso, la pressione dell'ossigeno è dimezzata, tra stato 1 e 2 V , T e R^* non cambiano.

Per entrambi gli stati è quindi possibile scrivere, dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$V/(R^* \cdot T_1) = M_1/p_1 \quad \text{e} \quad V/(R^* \cdot T_2) = M_2/p_2$$

uguagliando le due relazioni si ottiene: $p_2/p_1 = M_2/M_1$

da cui si ricava la massa dopo l'utilizzo: $M_2 = M_1 \cdot (p_2/p_1)$

Passando da ossigeno ad azoto, nelle stesse condizioni iniziali, per entrambe le specie possiamo scrivere:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{dove } p, V, R \text{ e } T \text{ sono le stesse}$$

quindi il numero di moli è lo stesso: $n_{O_2} = n_{N_2}$

Non è così per la massa, che risulta: $M_{N_2} = n_{n_2} \cdot M_{M_{N_2}}$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$V_1 = 200 \text{ dm}^3 = 200 \cdot 10^{-3} = 0.2 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 200 \text{ ata} = 200 \cdot 98100 = 19.62 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 20 \text{ C} = 20 + 273.15 = 293.15 \text{ K}$$

$$T_2 = 60 \text{ C} = 60 + 273.15 = 333.15 \text{ K}$$

La massa di O_2 contenuta nella bombola è: $M = (19.62 \cdot 10^6 \cdot 0.2)/((8314/32) \cdot 293.15) = 51.52 \text{ kg}$

Nota: la densità calcolata nell'ipotesi di gas ideale è 257 kg/m^3 ; se si facesse il calcolo considerando il gas come reale (utilizzando tabelle/diagrammi o equazioni di stato di gas reale), si otterrebbe una densità superiore: 280 kg/m^3 .

A $T_2 = 60 \text{ °C}$ la pressione dell' O_2 arriva a: $p_2 = 19.62 \cdot 10^6 \cdot (333.15/293.15) = 22.29 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Dopo l'utilizzo della bombola, sono stati consumati: $M_2 = 51.52 \cdot (1/2) = 25.76 \text{ kg}$ di O_2

Passando a N_2 , la massa iniziale diventa: $M_{N_2} = (19.62 \cdot 10^6 \cdot 0.2)/(8314 \cdot 293.15) \cdot 28 = 45.08 \text{ kg}$

Esercizio 2.3

Argomento: Gas ideali e “legge di Stevino”

Una campana, con l'apertura rivolta verso il basso, è sospesa appena sopra il pelo libero del mare e contiene un volume $V_i = 2 \text{ m}^3$ di aria alla temperatura $T_i = 30 \text{ C}$. La campana viene calata in acqua fino alla profondità $z_f = -20 \text{ m}$. A tale profondità non si è ancora raggiunto il termoclino e la temperatura dell'acqua è ancora molto vicina alla temperatura dell'aria esterna. Durante il contatto con la superficie del mare, una frazione f_e pari al 10% in massa dell'aria contenuta inizialmente nella campana riesce a sfuggire. Determinare:

1. il volume finale V_f dell'aria rimasta nella campana;
2. lavoro e calore scambiati tra acqua di mare e aria rimasta nella campana;
3. l'irreversibilità del processo.

Si tratti l'aria come sola aria secca, approssimabile a gas perfetto.

SOLUZIONE:

Questo esercizio verrà usato come esempio per evidenziare esplicitamente i passaggi concettuali suggeriti nelle linee guida per la soluzione dei problemi di Fisica tecnica. Per la grande maggioranza degli esercizi, questi passi potranno poi essere svolti “implicitamente”, procedendo molto più speditamente nella soluzione, ma come primo esempio si procederà proprio “passo passo”.

Passo 1: Passaggio dal sistema reale alla sua modellizzazione fisica, tramite le opportune semplificazioni

Assunzioni generali:

- Non ci sono reazioni nucleari e chimiche, né azioni elettromagnetiche.
- Non si può trascurare l'effetto della gravità.
- Le trasformazioni avvengono “lentamente” e senza attriti, non ci sono effetti dissipativi.

Assunzioni sulle sostanze coinvolte:

- L'aria sarà approssimata a sola aria secca (anche se essendo in prossimità e poi in contatto con acqua sarebbe più realistico considerare anche la presenza del vapore acqueo e quindi aria umida);
- L'aria secca sarà approssimata come miscela ideale di gas ideali;
- L'acqua sarà approssimata a liquido ideale, a densità costante;

Assunzioni sul sistema e sulle trasformazioni:

- La massa sfugge in parte all'inizio, per il resto della trasformazione la campana può essere considerata un sistema chiuso.

- La variazione di temperatura dell'acqua con la profondità marina viene trascurata, dato che la discesa della campana è solo fino ad una profondità molto limitata;

Assunzioni sulle interfacce presenti nel sistema:

- L'interfaccia tra acqua e aria ha curvatura trascurabile, per cui in ogni momento $P_{aria} = P_{acqua}$.
- L'interfaccia tra acqua e aria è perfettamente diabatica e non comporta resistenze di contatto, per cui in ogni momento $T_{aria} = T_{acqua}$.

Passo 2: Conversione del modello fisico in un modello matematico, creando il sistema di equazioni poi da risolvere

Il suggerimento per questo passo è di usare le “quattro radici” dell'edificio matematico, cioè le famiglie delle equazioni di bilancio, relazioni costitutive, relazioni all'interfaccia, condizioni al contorno e iniziali, introducendole (approccio “K.I.S.S.”) solo quando necessario, nel numero minimo necessario e iniziando dalle più semplici. Quindi per le relazioni di bilancio tipicamente nell'ordine: massa - energia - entropia - quantità di moto. Per le relazioni costitutive, usando le relazioni per sostanze ideali/perfette se possibile, le tabelle altrimenti.

L'esercizio non chiede di analizzare transitori, ecc. ma solo di considerare la situazione prima e dopo la trasformazione, per cui si userà la forma integrata delle equazioni.

Passando quindi specificamente a rispondere ai quesiti dell'esercizio...

1. Determinare il volume finale V_f dell'aria rimasta nella campana.

Questo quesito riguarda una variazione di volume, che è ovviamente “stretta parente” della variazione di massa. Quindi senz'altro sembra sensato introdurre l'equazione di conservazione della massa:

$$M_i + \Delta M = M_f$$

Ri-esprimendo attraverso la densità e il volume:

$$\rho_i V_i + \Delta M = \rho_f V_f$$

compare l'incognita richiesta V_f , insieme però alle densità a inizio e fine trasformazione. Si ha quindi una equazione con tre incognite.

Dato che tra i dati del problema ci sono temperature e pressioni, e tra le incognite le densità, viene naturale “chiedere aiuto” alle relazioni costitutive e specificamente all'equazione del gas ideale e alle equazioni per determinare i parametri caratterizzanti la miscela fittizia “aria secca”. Grazie a queste ulteriori equazioni il sistema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i V_i + \Delta M = \rho_f V_f \\ \rho_i = \frac{P_i}{R^* T_i} \\ \rho_f = \frac{P_f}{R^* T_f} \\ MM_{AS} = \frac{\sum_i MM_i N_i}{\sum_i N_i} \\ R^*_{AS} = \frac{R}{MM_{AS}} \end{array} \right.$$

Sapendo inoltre che $T_f = T_i$, si nota che l'unica cosa che manca per poter risolvere il sistema è P_f .

Serve quindi aggiungere una ulteriore equazione, che parli della “statica dei fluidi” per avere l'andamento della pressione con la profondità nella colonna d'acqua.

Si userà una seconda relazione fondamentale, quella di bilancio della quantità di moto. Infatti, la statica dei fluidi è ovviamente un caso particolare della dinamica dei fluidi. Considerando un fluido Newtoniano in movimento, dal bilancio di quantità di moto si possono ricavare le “famose” equazioni di Navier-Stokes, che nell’ipotesi di fluido ideale incompressibile possono essere scritte come (forma vettoriale):

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \rho (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} + \nabla P = \mu \nabla^2 \vec{w} + \rho \vec{g}$$

Per un fluido fermo, tutti i termini contenenti la velocità sono nulli e rimane soltanto:

$$\nabla P = \rho \vec{g}$$

che a sua volta dato che quello che serve è la variazione di pressione lungo la direzione del vettore gravità (che ha verso opposto all’asse delle quote) si riduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

e quindi:

$$dP = -\rho g dz$$

che è la ben nota legge di Stevino.

Quindi fin qui sono state usate relazioni di bilancio, relazioni costitutive, condizioni all’interfaccia... tre delle “quattro radici”. Dato che la legge di Stevino è un’equazione differenziale, serve integrarla, ed ecco che entra in gioco anche la famiglia delle condizioni al contorno e condizioni iniziali, nello specifico bisogna dare il valore di pressione in corrispondenza della quota iniziale ($z_i = 0$).

Avendo assunto l’acqua del mare come liquido perfetto con densità costante ρ_{acqua} , l’integrazione è molto semplice:

$$P_f = P_i - \rho_{acqua} g (z_f - z_i) = P_i + \rho_{acqua} g |z_f - z_i|$$

Il sistema può a questo punto essere risolto agevolmente:

$$V_f = \frac{M_f}{\rho_f} = \frac{(1 - f_e) V_i \rho_i}{\rho_f} = \frac{(1 - f_e) V_i \frac{P_i}{R^* T_i}}{\frac{P_f}{R^* T_f}} = (1 - f_e) V_i \frac{P_i}{P_f} = (1 - f_e) V_i \frac{P_i}{P_i + \rho_{acqua} g |z_f|}$$

Da questa equazione si nota anche che in effetti per la risposta a questa domanda non serve nemmeno determinare la massa molare e la costante specifica dell’aria secca, tanto nella soluzione si semplificano.

2. Determinare il lavoro compiuto dall’acqua del mare sull’aria rimasta nella campana

In questo caso viene richiesta un’informazione di scambio energetico, per cui è ovvio aggiungere al sistema l’equazione di conservazione dell’energia, scritta per l’aria:

$$\Delta U_{AS} = L_{AS} + Q_{AS}$$

Essendo la trasformazione isoterma $\Delta U_{AS} = 0$ e $L_{AS} = -Q_{AS}$.

Inoltre sapendo che:

$$L_{AS} = -M \int P dv = -M \int \frac{R_{AS}^* T}{v} dv = -M R_{AS}^* T \ln \frac{v_f}{v_i}$$

è immediato calcolare il lavoro e quindi anche il calore scambiati.

3. *Determinare l'irreversibilità del processo*

Come ultimo quesito, viene richiesta una informazione che coinvolge l'entropia, e diventa quindi necessario anche introdurre il bilancio entropico

$$\Delta S_{SI} = \Delta S_{AS} + \Delta S_{acqua}$$

nel quale immediatamente:

$$\Delta S_{AS} = M \left(c_{PAS} \ln \frac{T_f}{T_i} - R_{AS}^* \ln \frac{P_f}{P_i} \right) = -M R_{AS}^* \ln \frac{P_f}{P_i} \quad \text{essendo } T_f = T_i$$

$$\Delta S_{acqua} = \frac{Q_{acqua}}{T_{acqua}} = -\frac{Q_{AS}}{T_i (= T_f)}$$

Volendo quindi riassumere il sistema matematico complessivo che permette di rispondere a tutte e tre i quesiti dell'esercizio, si avrebbe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dalle relazioni fondamentali e loro rielaborazioni:} \\ \rho_i V_i + \Delta M = \rho_f V_f \\ Q_{AS} = -L_{AS} \\ \Delta S_{SI} = -M R_{AS}^* \ln \frac{P_f}{P_i} + \frac{Q_{acqua}}{T_{acqua}} \\ \\ \text{dalle relazioni costitutive:} \\ \rho_i = \frac{P_i}{R^* T_i} \\ \rho_f = \frac{P_f}{R^* T_f} \\ MM_{AS} = \frac{\sum_i MM_i N_i}{\sum_i N_i} \\ R_{AS}^* = \frac{R}{MM_{AS}} \\ \\ \text{dalle relazioni all'interfaccia:} \\ P_{AS} = P_{acqua} \\ T_{AS} = T_{acqua} \\ \\ \text{dalle informazioni sul sistema e sulla trasformazione:} \\ T_f = T_i \\ Q_{acqua} = -Q_{AS} \\ L_{AS} = -M R_{AS}^* T \ln \frac{v_f}{v_i} \end{array} \right.$$

LISTATO MATLAB PER LA SOLUZIONE:

```
Vi=2;
Ti=30+273.15;
zi=0;
```

```

zf=-20;
fe=0.1;

Pi=101325;
g=9.806;
rho_H2O=1000;

MM_AS=29;
Rs_AS=8314/29;

rho_AS_i=Pi/(Rs_AS*Ti);

Pf=Pi-rho_H2O*g*(zf-zi);

Vf=(1-fe)*Vi*Pi/Pf;

M=(1-fe)*rho_AS_i*Vi;

L_AS=-M*Rs_AS*Ti*log(Vf/Vi);

Q_H2O=L_AS; %Q_H2O=-Q_AS e Q_AS=L_AS

DStot=-M*Rs_AS*log(Pf/Pi)+Q_H2O/Ti;

```

Esercizio 2.4

Argomento: *Miscela ideali di gas ideali*

Calcolare la ripartizione delle pressioni parziali, la ripartizione volumetrica, la costante R^* e la densità dell'aria secca in condizioni standard (1 atm, 0 °C), sapendo che 1 kg di aria secca è costituito da 0.236 kg di ossigeno e da 0.764 kg di azoto (trascurando i costituenti minori).

SOLUZIONE:

Dalla legge delle pressioni parziali sono immediatamente ricavabili queste ultime, dopo conversione dell'informazione sulle frazioni massiche nella corrispondente in termini di frazioni molari:

$$\begin{aligned}
 n_{O_2} &= M_{O_2}/MM_{O_2} & ; & & n_{N_2} &= M_{N_2}/MM_{N_2} \\
 p_{O_2} &= p_{atm} \cdot n_{O_2}/n_{tot} & ; & & p_{N_2} &= p_{atm} \cdot n_{N_2}/n_{tot}
 \end{aligned}$$

Stesso discorso per i volumi parziali ($V_{O_2} = V_{tot} \cdot n_{O_2}/n_{tot}, \dots$), ma non è noto il volume (nemmeno quello specifico) della miscela "aria secca" \Rightarrow per ora è possibile solo calcolare i rapporti % dei componenti sul totale:

$$V_{O_2}/V = n_{O_2}/n_{tot} \quad ; \quad V_{N_2}/V = n_{N_2}/n_{tot}$$

R^* può essere calcolata come media pesata della costanti specifiche dei singoli costituenti, pesata sulle frazioni massiche (mentre la MM va determinata come media pesata sulle frazioni molari):

$$R^* = \frac{\sum (M_i R_i^*)}{\sum M_i}$$

($\sum M_i = 1$ perchè si sta ragionando per kg di aria secca, cioè in sostanza per unità di massa)

da cui poi immediatamente $MM_{as} = R/R_{as}^*$. Si noti che MM_{as} è una massa molare fittizia, perchè l'aria secca non è una specie chimica, né atomica né molecolare.

Sapendo infine che 1 kmol di un gas ideale in condizioni standard (1 atm, 0 °C) occupa 22.414 m³ (legge di Avogadro), si può calcolare il volume occupato da n_{tot} moli di aria secca.

RISULTATI NUMERICI:

$$n_{O_2} = 0.236 \text{ kg} / 32 \text{ kg/kmol} = 0.007375 \text{ kmol}$$

$$n_{N_2} = 0.764 \text{ kg} / 28 \text{ kg/kmol} = 0.027266 \text{ kmol}$$

$$p_{O_2} = 21572 \text{ Pa}$$

$$p_{N_2} = 79753 \text{ Pa} (= p_{atm} - p_{O_2} \text{ ovviamente})$$

$$V_{O_2} \% = 21.29 \%$$

$$V_{N_2} \% = 78.71 \%$$

$$R_{as}^* = 288 \text{ J/kgK}$$

$$MM_{as} = 28.87 \text{ kg/kmol}$$

$$\rho_{asCS} = 1.288 \text{ kg/m}^3$$

$$v_{asCS} = 0.776 \text{ m}^3/\text{kg}$$

OSSERVAZIONI:

Si noti come i valori ottenuti differiscano leggermente da quelli per la vera aria secca, che include anche i costituenti minori ($R_{as}^* = 287 \text{ J/kgK}$, $MM_{as} = 28.96 \text{ kg/kmol}$).

Esercizio 2.5

Argomento: Miscele ideali di gas ideali

Calcolare le pressioni parziali e la densità di una miscela di gas ideali costituita dalle seguenti percentuali in massa:

- 28 % di azoto N_2
- 12 % di elio He
- 44 % di anidride carbonica CO_2
- 16 % di metano CH_4

che si trova ad una pressione totale di 9 bar e occupa un volume totale di 2.5 dm³ alla temperatura di 3 °C.

SOLUZIONE:

Conoscendo la temperatura e le grandezze totali pressione e volume, la massa risulta implicitamente definita e viene esplicitata tramite la relazione:

$$p_{tot}V_{tot} = T \sum M_i R_i^*$$

dalla quale, considerando che $M_i = x_i M_{tot}$, si ricava:

$$M_{tot} = p_{tot}V_{tot} / (T \sum x_i R_i^*)$$

e quindi $\rho_m = M_{tot}/V_{tot}$.

Per calcolare le pressioni parziali si ricorre alla relazione:

$$p_i = M_i R_i^* T / V_{tot}$$

calcolando le masse dei singoli gas attraverso le frazioni massiche percentuali note: $M_i = x_i M_{tot}$.

RISULTATI NUMERICI:

Conversione delle unità di misura nel SI:

$$p_{tot} = 9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_{tot} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T = 3 + 273.15 = 276.15 \text{ K}$$

Calcoli:

$$MM_{N_2} = 28 \text{ kg/kmol}$$

$$MM_{He} = 4 \text{ kg/kmol}$$

$$MM_{CH_4} = 16 \text{ kg/kmol}$$

$$MM_{CO_2} = 44 \text{ kg/kmol}$$

$$R_i^* = 498.84 \text{ J/kgK}$$

$$M_{tot} = 0.0163 \text{ kg} = 16.3 \text{ g}$$

$$M_{N_2} = 4.57 \text{ g}$$

$$M_{He} = 1.96 \text{ g}$$

$$M_{CO_2} = 7.19 \text{ g}$$

$$M_{CH_4} = 2.61 \text{ g}$$

$$p_{N_2} = 149890 \text{ Pa} = 1.499 \text{ bar}$$

$$p_{He} = 449998 \text{ Pa} = 4.500 \text{ bar}$$

$$p_{CO_2} = 150069 \text{ Pa} = 1.5 \text{ bar}$$

$$p_{CH_4} = 149808 \text{ Pa} = 1.498 \text{ bar}$$

$$\rho_{tot} = 6.536 \text{ kg/m}^3$$

OSSERVAZIONI:

Si nota che le pressioni parziali dell'azoto, dell'anidride carbonica e del metano sono estremamente prossime il che fa pensare che, a meno degli errori di troncamento, siano uguali. Per verificare ciò devono risultare uguali le frazioni molari dei tre gas ideali ovvero il loro numero di moli. La verifica conferma tale fatto risultando $n_{N_2} = n_{CO_2} = n_{CH_4} = 0.1633$ [le frazioni molari si ricavano immediatamente considerando che $\tilde{x}_i = N_i / \sum N_i = (M_i / MM_i) / (\sum M_i / MM_i)$].

Esercizio 2.6 (esercizio di approfondimento)

Argomento: Gas ideali e “legge di Archimede”

Una mongolfiera è in volo livellato (in orizzontale a quota costante) a bassa quota. La temperatura dell'aria esterna è $T_{AE} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Sapendo che la massa totale della struttura vuota è $M = 300 \text{ kg}$ (pallone vuoto + navicella + equipaggiamento + equipaggio) e che il volume del pallone (riempito d'aria) è $V = 1000 \text{ m}^3$ (il volume della navicella può essere considerato trascurabile) determinare:

- la temperatura minima dell'aria interna T_{AI} al pallone che permette all'aerostato di effettuare volo orizzontale (i.e. fermo a quota costante) a pochi metri da terra;
- la temperatura dell'aria interna T_{AIz} al pallone che permette all'aerostato di effettuare volo orizzontale a $z = 3000 \text{ m}$, verificando che la temperatura ottenuta sia compatibile con la temperatura di fusione del materiale della mongolfiera (in prevalenza Nylon, $T_{fusione} = 230 \text{ }^\circ\text{C}$);

- come cambia in percentuale ogni 1000 m la forza di galleggiamento sulla mongolfiera;
- Extra: si provi a scrivere l'equazione di moto per la mongolfiera in funzione della quota z .

SOLUZIONE:

Per entrambe le situazioni di volo (vicino a terra e in quota) il peso totale di pallone + navicella è:

$$M \cdot g + V \cdot \rho_{AI} \cdot g \quad (\rho_{AI} = \text{densità aria contenuta nel pallone})$$

La forza di galleggiamento che la mongolfiera riceve è invece pari al peso dell'aria esterna spostata, e cioè (trascurando l'aria spostata dalla navicella, in quanto questa ha volume trascurabile): $V \cdot \rho_{AE} \cdot g$

Per il volo a quota stazionaria la forza di galleggiamento e la forza peso si devono bilanciare:

$$M \cdot g + V \cdot \rho_{AI} \cdot g = V \cdot \rho_{AE} \cdot g$$

Ipotizzando che la mongolfiera stia volando a quota abbastanza bassa da poter considerare la pressione dell'aria esterna p_{AE} pari alla pressione atmosferica, dall'equazione dei gas ideali (nell'ipotesi di aria secca) si ricava immediatamente la densità dell'aria esterna al pallone ρ_{AE} .

$$\rho_{AE} = p_{AE} / (T_{AE} \cdot R^*)$$

Conoscendo la densità dell'aria esterna, massa e volume della mongolfiera si può ricavare dal bilancio di forze la densità dell'aria all'interno del pallone come:

$$\rho_{AI} = \rho_{AE} - M/V$$

Ipotizzando poi che la pressione dell'aria interna al pallone p_{AI} sia uguale alla pressione atmosferica esterna (se così non fosse si avrebbe entrata o uscita di aria, o alternativamente un afflosciamento/dilatazione - fino ad eventuale esplosione - del pallone), dall'equazione dei gas ideali si ricava la temperatura dell'aria interna alla mongolfiera:

$$T_{AI} = p_{AI} / (\rho_{AI} \cdot R^*)$$

Nel caso di volo orizzontale a 3000 m, il bilancio di forze sulla mongolfiera rimane uguale al caso precedente, però con le densità calcolate a $z = 3000$ m:

$$M \cdot g + V \cdot \rho_{AIz} \cdot g = V \cdot \rho_{AEz} \cdot g$$

T_{AIz} si ricava come nel punto precedente dall'equazione dei gas ideali:

$$T_{AIz} = p_{AIz} / (\rho_{AIz} \cdot R^*)$$

Servono quindi la pressione esterna a 3000 m p_{AEz} , assunta uguale a quella interna p_{AIz} per i motivi espressi al punto precedente e ρ_{AIz} .

Dal bilancio di forze si ricava $\rho_{AIz} = \rho_{AEz} - M/V$, quindi serve ρ_{AEz} . Ricapitolando servono ρ_{AEz} e p_{AEz} per risolvere il problema.

E' quindi necessario trovare una relazione che permetta di calcolare pressione e densità al variare della quota. Facendo due ipotesi:

- Aria assunta come gas ideale $p = \rho \cdot R^* \cdot T$

- Aria in quiete

Se l'aria è assunta in quiete, vuol dire che non si muove e quindi la risultante delle forze su un generico volume d'aria è zero. Scrivendo il bilancio di forze per la direzione verticale al terreno per un generico volume d'aria a forma di esaedro alto dh , dove sulla faccia superiore, a causa dell'aumento di quota, agisce una pressione $p + dp$ diversa da quella che agisce sulla faccia inferiore:

$$-(p + dp) A + pA - V \rho g = 0$$

Essendo $V = A dh$ l'equazione si semplifica in:

$$dp = -\rho g dh \text{ nota come equazione di Stevino}$$

Mettiamo a sistema l'equazione appena ricavata con quella del gas ideale assunta per l'aria:

$$p = \rho \cdot R^* \cdot T$$

$$dp = -\rho g dh$$

Risolvendo il sistema - dividendo la seconda equazione con la prima:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R^*} \frac{dh}{T}$$

Si può quindi risolvere integrando a variabili separate, per farlo bisogna scrivere dh in funzione della temperatura e introdurre una relazione costitutiva, assumendo la variazione della temperatura con la quota costante:

$$a = \frac{dT}{dh} \text{ dove } a \text{ è costante}$$

Inserendo nell'equazione precedente si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R^* a} \frac{dT}{T}$$

Integrando a variabili separate tra lo stato a quota zero e lo stato a quota z :

$$\ln\left(\frac{p_z}{p_0}\right) = -\frac{g}{R^* a} \ln\left(\frac{T_z}{T_0}\right) \text{ e riscrivendo come } \frac{p_z}{p_0} = \left(\frac{T_z}{T_0}\right)^{-\frac{g}{R^* a}}$$

nonché riscrivendo anche la relazione costitutiva come:

$$a = \frac{T_z - T_0}{h_z - h_0} \text{ ed essendo } h_0 = 0, \text{ si ricava } T_z = a h_z + T_0$$

Sostituendo infine nell'equazione precedente si ottiene una relazione per la pressione in funzione della quota:

$$p_z = p_0 \left(1 + \frac{a h_z}{T_0}\right)^{-\frac{g}{R^* a}}$$

E' didatticamente utile rivedere come quest'ultima relazione non sia altro che la soluzione di un sistema di equazioni creato introducendo ipotesi che semplificassero il problema:

EQUAZIONE 1 = Ipotesi gas ideali $p = \rho \cdot R^* \cdot T$

EQUAZIONE 2 = Ipotesi aria ferma e conseguente bilancio forze $dp = -\rho g dh$

EQUAZIONE 3 = Ipotesi variazione temperatura con quota costante $a = dT/dh$

Conoscendo la quota, usando i valori di aria standard a quota zero e assumendo da letteratura una variazione di temperatura di -6.5 °C ogni 1000 m si può ottenere p_{AEz} e T_{AEz} dalle seguenti equazioni:

$$p_{AEz} = p_0 \left(1 + \frac{a h_z}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R^* a}}$$

$$T_{AEz} = a h_z + T_0$$

Usando l'equazione dei gas ideali si ricava ρ_{AEz} e si procede al calcolo di ρ_{AIz} e T_{AIz} come nel quesito precedente.

Variatione forza di galleggiamento:

La variazione è calcolata come il rapporto tra la forza di galleggiamento a due quote generiche. Essendo il volume e la massa della mongolfiera costanti e trascurando la variazione del campo gravitazionale con la quota, si ottiene:

$$\eta = \frac{\rho_{AEz2}}{\rho_{AEz1}} = \frac{p_{AEz2}}{p_{AEz1}} \frac{T_{AEz1}}{T_{AEz2}}$$

Usando le equazioni al punto precedente si ottiene la seguente relazione:

$$\eta = \left(\frac{T_0 + a(h_{z1})}{T_0 + a(h_{z2})} \right)^{-\left(\frac{g}{R^* a} + 1 \right)} \quad \text{dove } h_{z2} = h_{z1} + 1000$$

La variazione della forza di galleggiamento ogni 1000 m non sarà costante con l'aumentare della quota h_{z1} , più h_{z1} cresce più la perdita di galleggiamento è grande, ovvero il rapporto tende a zero. Un utile esercizio di "ripasso" di Analisi è controllare il campo di validità della relazione, effettuando un studio di funzione.

Equazione di moto della mongolfiera:

La variabile che può essere controllata è la temperatura dell'aria all'interno della mongolfiera tramite il bruciatore. Lasciando T_{AI} come dato di input, si può scrivere il bilancio di forze considerando anche le forze d'inerzia:

$$V \frac{p_{AE}(z)}{R^* T_{AE}(z)} g - \left(M g + V \frac{p_{AI}(z)}{R^* T_{AI}} g \right) = M \ddot{z}$$

Esplicitando la relazione per la variazione di pressione in funzione della quota z ed usando la relazione costitutiva per la variazione della temperatura con la quota si ottiene:

$$\frac{V g p_0}{R^*} \left(1 + \frac{a z}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R^* a}} \left(\frac{1}{a z + T_0} - \frac{1}{T_{AI}} \right) - M g = M \ddot{z}$$

Questa equazione può essere integrata numericamente per diversi valori di T_{AI} inferiori alla temperatura di fusione del Nylon (i.e. 230 °C), potendosi ad esempio ottenere grafici delle variabili di stato del moto ovvero la quota z e velocità di salita \dot{z} in funzione del tempo.

RISULTATI NUMERICI:

Volo orizzontale a pochi metri da terra:

La densità dell'aria esterna risulta: $\rho_{AE} = 101325 / (287 \cdot 293.15) = 1.204$ kg/m^3

mentre quella dell'aria interna: $\rho_{AI} = 1.204 - 300/1000 = 0.904$ kg/m^3

La temperatura dell'aria all'interno della mongolfiera è:

$T_{AI} = 101325 / (287 \cdot 0.904) = 390.5$ $K \cong 117.4$ C

Volo orizzontale a 3000 *m*:

Aria standard a quota zero: $\rho_{AE0} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ $p_{AE0} = 101325 \text{ N/m}^2$

Aria quota 3000 *m*: $p_{AEz} = 70095 \text{ N/m}^2$ $T_{AEz} = 268.65 \text{ K}$

Temperatura aria interna mongolfiera a 3000 *m*: $T_{AIz} = 401 \text{ K}$

Temperatura fusione Nylon: 230C

Variazione forza di galleggiamento:

$h_z1 = 2000 \text{ m}$ $\eta = 0.903$

$h_z1 = 14000 \text{ m}$ $\eta = 0.866$

$h_z1 = 60000 \text{ m}$ $\eta = 1.32$

L'ultimo valore supera l'unità, non è un valore fisicamente accettabile (si provi quindi a rivedere la formula ricavata per accertare il campo di validità).

Stati di aggregazione reali e miscelamenti

Esercizio 3.1

Argomento: *Coefficienti termovolumetrici*

La tecnica di taglio Water-Jet sfrutta un getto d'acqua (diametro dell'ordine dei decimi di mm) ad altissima pressione per tagliare materiali leggeri e compositi o, con l'aggiunta di polveri abrasive, anche materiali di maggiore resistenza quali metalli, marmo e vetro. La pressione del getto è intorno a 7000 bar nel primo caso e intorno a 4000 bar nel secondo. In queste condizioni la comprimibilità dell'acqua non è affatto trascurabile. Approssimando la compressione dell'acqua dalla pressione atmosferica alla pressione di lavoro a isoentropica ($T_{iniziale_{H_2O}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), calcolare le variazioni % di volume tra inizio e fine trasformazione nei due casi (si considerino tutti i coefficienti termovolumetrici costanti al variare della pressione).

SOLUZIONE:

Ciò che viene richiesto di calcolare è: $\Delta v\% = (v_f - v_i)/v_i \cdot 100$.

Approssimando la compressione a isoentropica e sapendo che il coefficiente di comprimibilità isoentropica è definito come:

$$k_s = -1/v \cdot (\partial v / \partial p)_s = -1/v \cdot (dv/dp)_s$$

si ha che: $(dv/dp)_s = -v \cdot k_s \quad \implies \quad dv = -v \cdot k_s \cdot dp \quad \implies \quad dv/v = -k_s \cdot dp$

Se k_s è approssimabile a costante rispetto a p:

$$\ln(v_f/v_i) = -k_s \cdot \Delta p \quad \implies \quad v_f = v_i \cdot \exp(-k_s \cdot \Delta p)$$

sostituendo l'espressione di v_f in quella di $\Delta v\%$ e semplificando v_i : $\Delta v\% = 100 \cdot [\exp(-k_s \cdot \Delta p) - 1]$

Ricordando che $k_T/k_s = c_p/c_v$, per liquidi e solidi risulta $k_s \cong k_T$ e si possono utilizzare i valori di k_T , tabulati o calcolabili tramite correlazioni quale:

$$k_T = -0.000138 \cdot T^3 + 0.043407 \cdot T^2 - 3.139587 \cdot T + 506.400974 \quad (\text{T in } ^\circ\text{C})$$

il cui $|E|_{\%,\text{medio}}$ è pari a 0.163.

RISULTATI NUMERICI:

Con ottima approssimazione k_T è indipendente dalla pressione; dipende invece dalla temperatura;

a $T = 20^\circ\text{C}$ si ha:

$$k_T = 458.918 \cdot 10^{-12} \text{Pa}^{-1} \text{ (da tabella o da correlazione)}$$

Dunque, utilizzando la relazione ricavata per il $\Delta v_\%$ (attenzione che nella formula vanno usati i valori in Pa):

- se $\Delta p = 4000 - 1 \text{ bar} \implies \Delta v_\% = -16.76 \%$
- se $\Delta p = 7000 - 1 \text{ bar} \implies \Delta v_\% = -27.74 \%$

Per confronto, utilizzando le tabelle dell'acqua per una compressione isoentropica o isoterma fino a 7000 bar si otterrebbero i valori riportati nella seguente tabella. Si noti come i valori di temperatura e entropia cambino ovviamente a seconda della trasformazione scelta, mentre il valore di densità (e quindi di volume specifico) finale non è molto differente (mentre la differenza sulla variazione di densità è più significativa). Si noti anche come (provate a verificare) la comprimibilità utilizzando i valori reali risulti minore di quella stimata con il calcolo approssimato svolto nell'esercizio; questo è corretto dato che nell'esercizio è stato utilizzato un valore costante dei coefficienti termovolumetrici.

water: Specified state points					
	Temperature (K)	Pressure (MPa)	Density (kg/m ³)	Enthalpy (kJ/kg)	Entropy (kJ/kg-K)
1	293.15	0.10000	998.21	84.006	0.29646
2	313.27	700.00	1181.4	718.75	0.29646
3	293.15	700.00	1191.7	642.77	0.045805

Esercizio 3.2

Argomento: Coefficienti termovolumetrici

Un impianto di riscaldamento è completamente riempito da acqua inizialmente a 20°C e alla pressione in caldaia di 2 bar. L'accensione della caldaia comporta un incremento di temperatura di 50°C . Trascurando le dilatazioni della struttura dell'impianto (tubazioni, ecc.), determinare la pressione finale.

SOLUZIONE:

Si tratta di determinare la variazione di pressione con la temperatura a volume costante per un liquido, ovvero di determinare $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v$. Dal momento che (differenziando v rispetto a T e P e sostituendo i coefficienti termovolumetrici alle derivate che compaiono):

$$dv = k_P v dT - k_T v dp$$

per un processo isocoro risulta: $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = k_P / k_T$, ovvero

$$\Delta p = k_P / k_T \Delta T$$

dove i valori dei coefficienti termovolumetrici sono, in prima approssimazione, valutati come valori medi nell'intervallo di temperatura considerato e a pressione atmosferica. Un successivo calcolo valuterà

il risultato finale adottando un valore medio tra le pressioni iniziale e finale.

RISULTATI NUMERICI:

Dalle tabelle termodinamiche risulta:

$$k_P = 3.93 \cdot 10^{-4} K^{-1}$$

$$k_T = 4.56 \cdot 10^{-5} bar^{-1}$$

Nota: attenzione all'unità di misura non- SI base!

da cui $\Delta p = 8.62 \cdot 50 = 430.9$ bar.

Esercizio 3.3

Argomento: Miscelamento in fase aeriforme

Un volume $V = 100$ l di azoto molecolare a $P = 1$ atm e $T_{N_2} = 60$ °C viene miscelato in un sistema cilindro-pistone adiabatico con un volume $V = 50$ l di ossigeno molecolare a $P = 1$ atm, $T_{O_2} = 200$ °C. Durante il processo, il pistone è costantemente sottoposto alla pressione atmosferica (1 atm). Dopo il raggiungimento dell'equilibrio, determinare:

- temperatura e composizione massica e molare finali della miscela;
- il lavoro scambiato dal sistema con l'ambiente esterno tra inizio e fine del miscelamento;
- l'irreversibilità (variazione totale di entropia) del processo.

SOLUZIONE:

```
%DATI IN INPUT
```

```
ViN2=0.1;  
ViO2=0.05;  
TiN2=333;  
TiO2=473;  
P=101325;  
R=8314;
```

```
%SOLUZIONE
```

```
%masse molari
```

```
MMO2=32;  
MMN2=28;
```

```
%costanti specifiche
```

```
RN2=R/MMN2;  
RO2=R/MMO2;
```

```
%calori specifici, N2 e O2 molecole biatomiche
```

```
cvN2=5/2*RN2;  
cvO2=5/2*RO2;  
cpN2=7/2*RN2;  
cpO2=7/2*RO2;
```

```
%densità iniziali e masse dei gas
```

```
rhoiN2=P/(RN2*TiN2);  
rhoiO2=P/(RO2*TiO2);  
MN2=ViN2*rhoiN2;  
MO2=ViO2*rhoiO2;
```

```
%trasformazione adiabatica e isobara, quindi isoentalpica;
```

```
%dal bilancio entalpico si ricava la temperatura finale Tf
```

```
%che risulta una media pesata delle T iniziali, pesata sulle
```

```
%capacità termiche a P costante
```

```
Tf=(MN2*cpN2*TiN2+MO2*cpO2*TiO2)/(MN2*cpN2+MO2*cpO2);
```

```

%composizione massica
xN2=MN2/(MN2+M02);
xO2=M02/(MN2+M02);

%composizione molare
NN2=MN2/MMN2;
NO2=M02/MMO2;
xmolN2=NN2/(NN2+NO2);
xmolO2=NO2/(NN2+NO2);

%lavoro scambiato: essendo processo a P costante, basta valutare
%la variazione di volume totale
rhofN2=P/(RN2*Tf);
rhofO2=P/(RO2*Tf);
VfN2=MN2/rhofN2;
VfO2=M02/rhofO2;
Vftot=VfN2+VfO2; %Vftot=Vitol => non essendoci variazione di volume,
                    %non c'è nemmeno lavoro: L=0

%variazione entropica: può essere calcolata o considerando la temperatura
%e le pressioni PARZIALI, oppure la temperatura e i volumi totali (quindi
%come volume finale il volume dell'intero recipiente)
PPiN2=P;
PPiO2=P;
PPfN2=xmolN2*P;
PPfO2=xmolO2*P;

DSN2_pp=MN2*(cpN2*log(Tf/TiN2)-RN2*log(PPfN2/PPiN2));
DSO2_pp=M02*(cpO2*log(Tf/TiO2)-RO2*log(PPfO2/PPiO2));
DSN2_vt=MN2*(cvN2*log(Tf/TiN2)+RN2*log(Vftot/ViN2));
DSO2_vt=M02*(cvO2*log(Tf/TiO2)+RO2*log(Vftot/ViO2));

DStot=DSN2_pp+DSO2_pp;

```

$DSN2_{pp}$	20.239130	$DSN2_{vt}$	20.239130	$DSO2_{pp}$	5.151024	$DSO2_{vt}$	5.151024
$DStotP$	25.390154	$DStotV$	25.390154	$MMN2$	28.000000	$MMO2$	32.000000
$MN2$	0.102476	$MO2$	0.041225	$NN2$	0.003660	$NO2$	0.001288
P	101325.000000	$PPfN2$	74944.057858	$PPfO2$	26380.942142	$PPiN2$	101325.000000
$PPiO2$	101325.000000	R	8314.000000	$RN2$	296.928571	$RO2$	259.812500
Tf	369.450352	$TiN2$	333.000000	$TiO2$	473.000000	$VfN2$	0.110946
$VfO2$	0.039054	$Vftot$	0.150000	$ViN2$	0.100000	$ViO2$	0.050000
$cpN2$	1039.250000	$cpO2$	909.343750	$cvN2$	742.321429	$cvO2$	649.531250
$rhofN2$	0.923652	$rhofO2$	1.055603	$rhoiN2$	1.024756	$rhoiO2$	0.824509
$xN2$	0.713117	$xO2$	0.286883	$xmolN2$	0.739640	$xmolO2$	0.260360

OSSERVAZIONI:

Può venire la curiosità di capire se il fatto che in questo esercizio il lavoro risulti nullo sia una “coincidenza” legata puramente ai valori scelti nell’esercizio per le variabili termodinamiche a inizio e fine miscelamento, o se dipenda da altro. Per verificarlo, si può calcolare il lavoro in generale per una trasformazione di questo tipo (miscelamento adiabatico e isobaro per gas perfetti):

$$L = - \int PdV = \left(- \int PdV \right)_{Gas 1} + \left(- \int PdV \right)_{Gas 2} = -P(V_{1f} - V_{1i}) - P(V_{2f} - V_{2i}) = \quad (3.1)$$

$$= -P(V_{1f} - V_{1i} + V_{2f} - V_{2i}) = -P \left(\frac{M_1 R_1^* T_{1f}}{P} - \frac{M_1 R_1^* T_{1i}}{P} + \frac{M_2 R_2^* T_{2f}}{P} - \frac{M_2 R_2^* T_{2i}}{P} \right)$$

in cui P quindi si semplifica, e $T_{1f} = T_{2f}$, ottenendo così:

$$L = - [(M_1 R_1^* + M_2 R_2^*) T_f - M_1 R_1^* T_{1i} - M_2 R_2^* T_{2i}]$$

La temperatura finale come visto nella soluzione è pari a:

$$T_f = \frac{M_1 c_{P1} T_{1i} + M_2 c_{P2} T_{2i}}{M_1 c_{P1} + M_2 c_{P2}}$$

che nell'ipotesi di gas perfetti e se i due gas hanno la stessa complessità molecolare (e quindi gli stessi gradi di libertà, che "si semplificano" nell'equazione) può essere ridotta a:

$$T_f = \frac{M_1 R_1^* T_{1i} + M_2 R_2^* T_{2i}}{M_1 R_1^* + M_2 R_2^*}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione per il calcolo del lavoro si nota come quest'ultimo risulti identicamente nullo. Questo risultato non si otterrebbe se si utilizzassero gas a differente complessità molecolare.

Esercizio 3.4

Argomento: Entropia di miscelamento per sistemi omogenei

Si consideri un recipiente dai contorni adiabatici, impermeabili e rigidi, diviso in due parti, di volume V_1 e V_2 rispettivamente, da un setto diabatico impermeabile flessibile. Nella prima parte è contenuta una massa M_1 di un gas perfetto avente costante specifica R_1^* , nella seconda una massa M_2 di un altro gas perfetto avente costante specifica R_2^* . Il setto viene rimosso e i due gas si miscelano. Determinare la variazione di entropia tra inizio e fine del processo ("entropia di miscelamento").

SOLUZIONE:

Essendo il setto separatore diabatico e flessibile, i due gas ad inizio processo sono alla stessa T ed alla stessa p . Essendo poi il recipiente chiuso, adiabatico e rigido, esso è isolato rispetto all'esterno (si trascurano eventuali campi esterni) e quindi $\Delta E_{tot} = 0$ e $\Delta U = 0$. Dato poi che per un gas perfetto $U = f(T)$, ne consegue che $T_f = T_i$.

Essendo S variabile estensiva, la variazione complessiva di entropia sarà pari alla somma delle variazioni dei due gas singoli. Per un gas perfetto:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du + p \cdot dv}{T} = c_v \cdot \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} \cdot dv = c_v \cdot \frac{dT}{T} + R^* \cdot \frac{dv}{v}$$

Integrando tra stato iniziale e finale si ottiene:

$$\Delta s = c_v \cdot \ln \frac{T_f}{T_i} + R^* \cdot \ln \frac{v_f}{v_i}$$

in cui il primo termine è nullo, dato che la temperatura non varia. Per cui risulta:

$$\Delta S_{mix} = M_1 \cdot R_1^* \cdot \ln \frac{(V_{f1}/M_1)}{(V_{i1}/M_1)} + M_2 \cdot R_2^* \cdot \ln \frac{(V_{f2}/M_2)}{(V_{i2}/M_2)} = M_1 \cdot R_1^* \cdot \ln \frac{V_f}{V_{i1}} + M_2 \cdot R_2^* \cdot \ln \frac{V_f}{V_{i2}}$$

dato che $V_f = V_{i1} + V_{i2}$ è lo stesso per entrambi i gas. Ovviamente il volume finale è più grande di entrambi i volumi iniziali, pertanto l'entropia aumenta anche per entrambi i gas singoli.

OSSERVAZIONI:

Cosa succederebbe se si miscelassero due masse dello stesso gas? L'utilizzo della formula appena vista sembrerebbe evidenziare ancora un aumento di entropia, ma che significato fisico avrebbe? Nessuno, ed infatti è un caso in cui la Matematica si "scolla" dalla Fisica: miscelando due masse dello stesso gas, nelle stesse condizioni di T e P, non succede nulla dal punto di vista dei modi possibili di disporsi dei costituenti microscopici, in quanto manca la *distinguibilità* degli stessi (sono tutte molecole indistinguibili).

Esercizio 3.5

Argomento: Miscelamento di due correnti liquide

Una portata $M_h = 100 \text{ kg/s}$ di acqua a P_{atm} e $T_{hi} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ e una portata $M_r = 75 \text{ kg/s}$ di refrigerante HFC134a ($c_{pr} = 1419 \text{ J/kgK}$) anch'essa a P_{atm} ma a $T_{ri} = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ vengono miscelate in un miscelatore di massa trascurabile, esternamente immerso in una grande massa di acqua a temperatura $T_{ae} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ (approssimabile a costante). Sapendo che il miscelatore è progettato per funzionare a pressione costante e che la temperatura della miscela a fine miscelamento è $T_{mu} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$, determinare la potenza termica ceduta all'acqua in cui è immerso il miscelatore e l'irreversibilità del processo (produzione entropica totale) per unità di tempo. Determinare anche la temperatura di miscela e l'irreversibilità che si avrebbero se non ci fosse cessione di calore all'ambiente.

SOLUZIONE:

%DATI

```
Mh=100;
Thi=80+273.15;
cph=4186;
Mr=75;
Tri=45+273.15;
cpr=1419;
```

```
Tae=10+273.15;
```

```
Tmu=35+273.15;
```

```
%trasformazione isobara ma non adiabatica, per cui nel bilancio entalpico
%è necessario includere anche il calore ceduto alla massa d'acqua esterna
%Quindi scrivendo il I principio per sistemi fluenti sul miscelatore e
%considerando che è in condizioni stazionarie e isobare (quindi  $vdP = 0$ ), ed
%inoltre trascurando le variazioni cinetiche e potenziali:
```

```
%0 =  $M_h \cdot h_{hi} + M_r \cdot h_{ri} - M_h \cdot h_{hu} - M_r \cdot h_{ru} + Q$ 
```

```
%e quindi rielaborando:
```

```
% $Q = M_h \cdot (h_{hu} - h_{hi}) + M_r \cdot (h_{ru} - h_{ri})$ 
```

```
%e considerando che in uscita la miscela è tutta a  $T_{mu}$ 
```

```
% $Q = M_h \cdot c_{ph} \cdot (T_{mu} - T_{hi}) + M_r \cdot c_{pr} \cdot (T_{mu} - T_{ri})$ 
```

```
 $Q = M_h \cdot c_{ph} \cdot (T_{mu} - T_{hi}) + M_r \cdot c_{pr} \cdot (T_{mu} - T_{ri});$ 
```

```
%quale sarebbe la T di miscela se non ci fosse cessione di calore?
```

```
 $T_{mu\_adiab} = (M_h \cdot c_{ph} \cdot T_{hi} + M_r \cdot c_{pr} \cdot T_{ri}) / (M_h \cdot c_{ph} + M_r \cdot c_{pr});$ 
```

```
%dal punto di vista dell'acqua che riceve il calore
```

```
 $Q_{ae} = -Q;$ 
```

```
%produzione entropica
```

```
 $D_{sh} = c_{ph} \cdot \log(T_{mu} / T_{hi});$ 
```

```
 $D_{sr} = c_{pr} \cdot \log(T_{mu} / T_{ri});$ 
```

```
 $DSh = M_h \cdot D_{sh};$ 
```

```
 $DSr = M_r \cdot D_{sr};$ 
```

```
DSae=Qae/Tae;

DStot=DSh+DSr+DSae;
```

```
%quale sarebbe il DStot se non ci fosse cessione di calore?
Dsh_adiab=cph*log(Tmu_adiab/Thi);
Dsr_adiab=cpr*log(Tmu_adiab/Tri);
DStot_adiab=Mh*Dsh_adiab+Mr*Dsr_adiab;
```

RISULTATI NUMERICI:

$DSae$	70285.184531	DSh	-57057.783042	DSr	-3398.819905	$DStot$	9828.581584
$DStot_{adiab}$	452.608283	Dsh	-570.577830	Dsh_{adiab}	-84.951511	Dsr	-45.317599
Dsr_{adiab}	119.303459	Mh	100.000000	Mr	75.000000	Q	-19901250.000000
Qae	19901250.000000	Tae	283.150000	Thi	353.150000	Tmu	308.150000
Tmu_{adiab}	346.055338	Tri	318.150000	cph	4186.000000	cpr	1419.000000

OSSERVAZIONI:

Cosa succederebbe se invece che miscelare due fluidi differenti si miscelassero due portate dello stesso fluidi, ad esempio acqua calda e fredda? Si potrebbe risolvere nello stesso identico modo, o si potrebbe osservare che nell'ipotesi di liquido perfetto il calore specifico non cambia con la temperatura e quindi sarebbe possibile semplificarlo nella relazione per il calcolo della T di miscela, ad esempio nel caso senza cessione di calore all'ambiente:

$$T_{mu_{adiab}} = (Mh1 * cph1 * Thi1 + Mh2 * cph2 * Thi2) / (Mh1 * cph1 + Mh2 * cph2) = (Mh1 * Thi1 + Mh2 * Thi2) / (Mh1 + Mh2)$$

Quest'ultima formula è corretta per questo caso, ma si presti molta attenzione a *non* dedurne che si possano in generale fare operazioni di media pesata su grandezze intensive!

Esercizio 3.6

Argomento: Proprietà dei solidi

Un blocco di metallo 1 ($M_1 = 10 \text{ kg}$, $T_{1i} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$), di cui si vuole misurare il calore specifico, viene posto a contatto con un blocco di acciaio ($M_2 = 40 \text{ kg}$, $T_{2i} = 45 \text{ }^\circ\text{C}$, $c_{V2} = 450 \text{ J/kgK}$). L'insieme viene isolato verso l'esterno e dopo un certo tempo i due blocchi si portano in equilibrio termico a $T_f = 35 \text{ }^\circ\text{C}$. Calcolare il calore specifico c_{V1} del blocco di metallo 1 e la variazione totale di entropia del processo ΔS_{tot} .

SOLUZIONE:

Il sistema in esame è costituito da due blocchi metallici a contatto tra di loro. Inizialmente i due blocchi sono a temperature diverse, mentre nello stato finale si portano alla medesima temperatura. Il sistema è isolato verso l'esterno, pertanto la sua variazione totale di energia deve essere nulla. Essendo nulle le variazioni di energia potenziale e cinetica, deve essere conseguentemente nulla anche la variazione di energia interna. Dunque $U_i = U_f$, e quindi (essendo per un solido l'energia interna

praticamente solo funzione della temperatura):

$$U_{rif} + M_1 \cdot c_{V1} \cdot (T_{1i} - T_{rif}) + U_{rif} + M_2 \cdot c_{V2} \cdot (T_{2i} - T_{rif}) = 2 \cdot U_{rif} + (M_1 \cdot c_{V1} + M_2 \cdot c_{V2}) \cdot (T_f - T_{rif})$$

in cui l'unica incognita è c_{V1} , che risulta (si noti come il valore dell'energia interna nello stato di riferimento U_{rif} si elida, così come la temperatura di riferimento T_{rif}):

$$c_{V1} = c_{V2} \cdot \frac{M_2 \cdot (T_f - T_{2i})}{M_1 \cdot (T_{1i} - T_f)}$$

La variazione totale di entropia del processo è data da:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

dove (essendo la pressione costante e le variazioni di volume trascurabili):

- ΔS_1 è la variazione di entropia del blocco 1, pari a: $\Delta S_1 = M_1 \cdot c_{V1} \cdot \ln(T_f/T_{1i})$
- ΔS_2 è la variazione di entropia del blocco 2, pari a: $\Delta S_2 = M_2 \cdot c_{V2} \cdot \ln(T_f/T_{2i})$

RISULTATI NUMERICI:

Il calore specifico del blocco di metallo 1 è pari a:

$$c_{V1} = 450 \cdot \frac{40 \cdot (35 - 45)}{10 \cdot (15 - 35)} = 900 \text{ J/kgK}$$

La variazione totale di entropia del processo risulta invece:

$$\Delta S_{tot} = 10 \cdot 900 \cdot \ln\left(\frac{308.15}{288.15}\right) + 40 \cdot 450 \cdot \ln\left(\frac{308.15}{318.15}\right) = 29.1 \text{ J/K}$$

Esercizio 3.7

Argomento: Proprietà dell'acqua

Determinare il valore dell'entalpia e dell'entropia specifiche dell'acqua liquida a $P_1 = 1 \text{ bar}$ e $T_1 = 30 \text{ °C}$:

1. utilizzando le tabelle dell'acqua nello stato di liquido sottoraffreddato
2. muovendosi lungo una trasformazione isobara partendo dalla temperatura dello stato di riferimento;
3. muovendosi lungo una trasformazione isobara partendo dalle condizioni di saturazione a P_1 ;
4. muovendosi lungo una trasformazione isoterma partendo dalle condizioni di saturazione a T_1 ;
5. approssimando direttamente i valori a quelli dello stato di liquido saturo a pari temperatura T_1 .

SOLUZIONE:

1. leggendo direttamente i valori dalle tabelle del liquido sottoraffreddato a $P_1 = 1 \text{ bar}$ e $T_1 = 30 \text{ °C}$ si ha: $h_1 = 125820 \text{ J/kg}$, $s_1 = 436.73 \text{ J/kgK}$ ($\rho = 995.65 \text{ kg/m}^3$, $v = 1/\rho = 0.0010044 \text{ m}^3/\text{kg}$).

2. per l'acqua lo stato di riferimento è acqua liquida satura a 0 °C, la cui corrispondente pressione di saturazione è $P_{sat}(T_{rif}) = 611$ Pa. Non è quindi rigorosamente a P_1 . Trascurando però il contributo legato alla pressione, si può calcolare:

- $dh = c_P dT \Rightarrow \Delta h = \int c_P dT = [\text{se } c_P \text{ viene approssimato a costante}] \quad c_P (T_f - T_i) = 4186 \cdot (303.15 - 273.15) = 125580 \text{ J/kg.}$

- $ds = c_P dT/T \Rightarrow \Delta s = \int c_P/T dT = [\text{se } c_P \text{ viene approssimato a costante}] \quad c_P \log(T_f/T_i) = 4186 \cdot \ln(303.15/273.15) = 436.21 \text{ J/kgK.}$

3. in questo caso si procede in modo assolutamente analogo al punto precedente, in questo caso senza nemmeno dover trascurare il contributo della pressione, partendo dal punto $P_1, T_{sat}(P_1)$ (leggibile sulle tabelle dell'acqua a saturazione). Per il caso in questione, $T_{sat}(1 \text{ bar}) = 100$ °C quindi $h_{sat} = 419170 \text{ J/kg}$, $s_{sat} = 1307.2 \text{ J/kgK}$:

- $h_1 = h_{sat} + \Delta h = 419170 + 4186 \cdot (303.15 - 373.15) = 126150 \text{ J/kg.}$

- $s_1 = s_{sat} + \Delta s = 1307.2 + 4186 \cdot \ln(303.15/373.15) = 437.55 \text{ J/kgK.}$

4. partendo dalle condizioni di saturazione a T_1 e muovendosi lungo una trasformazione isoterma, non si hanno relazioni comode per il calcolo di dh che dovrebbe essere calcolato come $dh = Tds + vdP$. Una approssimazione spesso utilizzata, anche se non ha fondamento teorico, è quella di confondere la trasformazione isoterma con quella isoentropica. In questo modo si può calcolare dh come vdP e considerare s_1 coincidente con $s_{sat}(T_1)$. Quindi:

- $h_1 = h_{sat}(30 \text{ °C}) + v_{sat}(30 \text{ °C}) \cdot (P_1 - P_{sat}(30 \text{ °C})) = 125730 + 0.00100441 \cdot (100000 - 4247) = 125826 \text{ J/kg.}$

- $s_1 = s_{sat}(30 \text{ °C}) = 436.75 \text{ J/kgK.}$

5. considerando la condizione di liquido sottoraffreddato approssimabile a quella del liquido saturo a pari temperatura, semplicemente si leggono i valori di entalpia ed entropia specifiche sulla tabella del liquido saturo: $h_1 = h_{sat}(30 \text{ °C}) = 125730 \text{ J/kg}$; $s_1 = s_{sat}(30 \text{ °C}) = 436.75 \text{ J/kgK}$.

Esercizio 3.8

Argomento: Proprietà dell'acqua

Determinare le condizioni dell'acqua a temperatura $T = 180$ °C e massa volumica $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$.

SOLUZIONE:

Per determinare in che condizioni è l'acqua a $T = 180$ °C e $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, si deve confrontare il volume specifico v con i valori di liquido saturo v_{LS} e di vapore saturo v_{VS} , ricavati dalle tabelle in corrispondenza di $T = 180$ °C:

- se $v < v_{LS} \quad \Rightarrow \quad$ liquido sottoraffreddato
- se $v = v_{LS} \quad \Rightarrow \quad$ liquido saturo
- se $v_{LS} < v < v_{VS} \quad \Rightarrow \quad$ miscela liquido vapore
- se $v = v_{VS} \quad \Rightarrow \quad$ vapore saturo
- se $v > v_{VS} \quad \Rightarrow \quad$ vapore surriscaldato

RISULTATI NUMERICI:

Il volume specifico è pari a: $v = 1/100 = 0.01 \text{ m}^3/\text{kg}$

Dalle tabelle, a $T = 180 \text{ }^\circ\text{C}$, si ricava: $v_{LS} = 0.001127 \text{ m}^3/\text{kg}$ $v_{VS} = 0.19405 \text{ m}^3/\text{kg}$

Il volume specifico dell'acqua è compreso tra i valori di liquido e vapor saturo, per cui l'acqua a $T = 180 \text{ }^\circ\text{C}$ e $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$ è una miscela liquido vapore, il cui titolo è:

$$x = \frac{v - v_{LS}}{v_{VS} - v_{LS}} = \frac{0.01 - 0.001127}{0.19405 - 0.001127} = 0.046$$

Esercizio 3.9

Argomento: Proprietà dell'acqua

Determinare il volume di un serbatoio che contiene una massa $M = 4 \text{ kg}$ di acqua allo stato di vapore umido con frazione massica $x = 0.2$ e temperatura $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

SOLUZIONE:

Si noti che se ci si trova nella zona di transizione di fase liquido/vapore alla temperatura di $100 \text{ }^\circ\text{C}$, la pressione è quella atmosferica ($P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$).

Il volume specifico, utilizzando la "regola della leva", è pari a: $v = (1 - x) \cdot v_{LS} + x \cdot v_{VS}$

per cui il volume del serbatoio risulta: $V = M \cdot v$

RISULTATI NUMERICI:

Dalle tabelle, a $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, si ricava: $v_{LS} = 0.001044 \text{ m}^3/\text{kg}$ $v_{VS} = 1.6729 \text{ m}^3/\text{kg}$

allora: $v = (1 - 0.2) \cdot 0.001044 + 0.2 \cdot 1.6729 = 0.3354 \text{ m}^3/\text{kg}$

e dunque: $V = 4 \cdot 0.3354 = 1.342 \text{ m}^3$

Esercizio 3.10

Argomento: Riscaldamento isobaro + evaporazione

Calcolare il calore necessario per riscaldare 10 litri di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ fino alla condizione finale di miscela liquido-vapore con titolo $x = 0.8$ alla pressione costante di 1 atm.

SOLUZIONE:

Alla temperatura di $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e alla pressione atmosferica l'acqua è nelle condizioni di liquido sotto-raffreddato, per cui l'entalpia dello stato iniziale è pari a:

$$h_i = c_{H_2O} \cdot (T_i - T_{rif}) = c_{H_2O} \cdot T_i \quad \text{se } T_{rif} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

Lo stato finale è una miscela liquido-vapore, la cui entalpia è:

$$h_f = (1 - x) \cdot h_{LS} + x \cdot h_{VS}$$

dove h_{LS} e h_{VS} sono rispettivamente le entalpie di liquido e vapore saturo, che si ricavano dalle tabelle del vapor d'acqua in corrispondenza della pressione atmosferica.

Per il riscaldamento a pressione costante, il calore da fornire alla massa d'acqua risulta quindi:

$$Q = M \cdot (h_f - h_i) = V \cdot \rho_{H_2O} \cdot (h_f - h_i)$$

RISULTATI NUMERICI:

L'entalpia dello stato iniziale è pari a: $h_i = 4.186 \cdot 20 = 83.74$ kJ/kg

mentre quella dello stato finale risulta: $h_f = (1 - 0.8) \cdot 419.04 + 0.8 \cdot 2676.1 = 2224.7$ kJ/kg

Il calore da fornire alla massa d'acqua per il riscaldamento a pressione costante è dunque:

$$Q = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot (2224.7 - 83.74) = 21409.6 \text{ kJ}$$

Esercizio 3.11

Argomento: Raffreddamento isobaro

Una massa $M = 5$ kg di vapor d'acqua alla temperatura $T_i = 100$ °C e titolo $x = 0.9$, viene posta in contatto con una sorgente fredda isoterma a $T_s = 60$ °C. Determinare il calore che deve essere asportato dall'acqua per raffreddarla fino alla temperatura finale $T_f = 80$ °C a pressione costante $p = 101325$ Pa. Determinare la variazione di entropia complessiva del sistema (sorgente + massa d'acqua).

SOLUZIONE:

Il calore che deve essere asportato dall'acqua (raffreddamento a pressione costante) è pari a:

$$Q = M \cdot (h_f - h_i)$$

dove:

- h_f è l'entalpia dello stato finale di liquido sottoraffreddato (alla temperatura di 80 °C e a pressione atmosferica l'acqua si trova nelle condizioni di liquido sottoraffreddato):

$$h_f = c_{H_2O} \cdot T_f$$

- h_i è l'entalpia dello stato iniziale di miscela liquido-vapore:

$$h_i = (1 - x) \cdot h_{LS} + x \cdot h_{VS}$$

con h_{LS} e h_{VS} rispettivamente entalpia specifica di liquido e vapore saturi, ricavate dalle tabelle del vapor d'acqua in corrispondenza di p .

La variazione totale di entropia del sistema è data da:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_{S.C.}$$

dove:

- ΔS_{H_2O} è la variazione di entropia della massa d'acqua. Il raffreddamento dell'acqua può essere diviso in due parti: una prima a temperatura costante, in cui si passa dalle condizioni iniziali a quelle di liquido saturo ($T_i = T_{LS}$), ed una seconda a temperatura variabile, in cui si passa dalle condizioni di liquido saturo a quelle finali di liquido sottoraffreddato. Per cui risulta:

$$\Delta S_{H_2O} = \int_i^f \frac{dQ_{H_2O}}{T_{H_2O}} = M \cdot c_{H_2O} \cdot \ln \left(\frac{T_f}{T_{LS}} \right) + \frac{M \cdot (h_{LS} - h_i)}{T_i}$$

- $\Delta S_{S.C.}$ è la variazione di entropia della sorgente di calore isoterma, che riceve tutto il calore Q dovuto al raffreddamento della massa d'acqua:

$$\Delta S_{S.C.} = \frac{Q}{T_s}$$

RISULTATI NUMERICI:

L'entalpia specifica dello stato finale è pari a: $h_f = 4.186 \cdot 80 = 334.94$ kJ/kg

Dalle tabelle dell'acqua, in corrispondenza della pressione atmosferica, si ricavano i valori dell'entalpia di liquido e vapore saturi, rispettivamente pari a:

$$h_{LS} = 419.04 \text{ kJ/kg} \quad \text{e} \quad h_{VS} = 2676.1 \text{ kJ/kg}$$

da cui l'entalpia dello stato iniziale risulta:

$$h_i = (1 - 0.9) \cdot 419.04 + 0.9 \cdot 2676.1 = 2450.4 \text{ kJ/kg}$$

Il calore da asportare all'acqua è quindi pari a:

$$Q = 5 \cdot (334.94 - 2450.4) = -10577.3 \text{ kJ} \quad \text{negativo uscente}$$

Le variazioni di entropia della massa d'acqua e della sorgente di calore isoterma sono rispettivamente pari a:

$$\Delta S_{H_2O} = 5 \cdot 4.186 \cdot \ln \left(\frac{353.15}{373.15} \right) + \frac{5 \cdot (419.04 - 2450.4)}{373.15} = -28.37 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{S.C.} = \frac{10577.3}{333.15} = 31.15 \text{ kJ/K}$$

per cui la variazione totale di entropia del sistema sorgente + massa d'acqua risulta:

$$\Delta S_{tot} = -28.37 + 31.15 = 3.38 \text{ kJ/K}$$

OSSERVAZIONI:

La variazione di entropia dell'acqua ΔS_{H_2O} è negativa in quanto l'acqua cede calore e la sua entropia diminuisce, mentre la variazione di entropia della sorgente di calore isoterma $\Delta S_{S.C.}$ aumenta in quanto riceve calore.

L'aumento di entropia della sorgente di calore è comunque maggiore della diminuzione di entropia dell'acqua, per cui la variazione totale di entropia del sistema sorgente + massa d'acqua è positiva ed il secondo principio della termodinamica è rispettato.

Esercizio 3.12

Argomento: Miscelamento di sostanze pure

In un sistema chiuso si miscelano adiabaticamente e a pressione costante ($p = 2.7 \text{ bar}$) una massa $M_1 = 4 \text{ kg}$ di vapor d'acqua con titolo $x = 0.2$ ed una massa $M_2 = 2 \text{ kg}$ di acqua liquida alla temperatura $T_2 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare lo stato finale della miscela.

SOLUZIONE:

Essendo $H = U + PV$, $dH = dU + pdV + Vdp$. Per il primo principio della Termodinamica per sistemi semplificati chiusi, $dU + pdV = \delta Q$, e $\delta Q = 0$ dato che la trasformazione è adiabatica. Essendo anche isobara, è pure $dp = 0$. Pertanto una trasformazione adiabatica ed isobara di un sistema chiuso è isoentalpica.

Quindi:

$$M_1 \cdot h_1 + M_2 \cdot h_2 = (M_1 + M_2) \cdot h_f$$

dove:

- h_1 è l'entalpia del vapor d'acqua con titolo $x = 0.2$, pari a:

$$h_1 = (1 - x) \cdot h_{1,LS} + x \cdot h_{1,VS}$$

dove $h_{1,LS}$ e $h_{1,VS}$ sono rispettivamente l'entalpia di liquido e vapore saturo, ricavate dalle tabelle dell'acqua in corrispondenza di $p = 0.27 \text{ MPa}$.

- h_2 è l'entalpia dell'acqua liquida, pari a: $h_2 = c_{h_2o} \cdot T_2$

L'entalpia dello stato finale risulta quindi:

$$h_f = \frac{M_1 \cdot h_1 + M_2 \cdot h_2}{M_1 + M_2}$$

RISULTATI NUMERICI:

Il vapor d'acqua iniziale con titolo $x = 0.2$ si trova alla pressione $p = 0.27 \text{ MPa}$. I valori di $h_{1,LS}$ e $h_{1,VS}$ sono tabulati per le pressioni di 0.25 e 0.275 MPa: per cui per ottenere il valore di h_1 è necessario innanzitutto interpolare linearmente i valori di entalpia di liquido e vapore saturo tra le pressioni di 0.25 e 0.275 MPa. Risulta dunque:

$$h_{1,LS} = h_{LS,0.25} + \frac{h_{LS,0.275} - h_{LS,0.25}}{0.275 - 0.25} \cdot (0.27 - 0.25) = 535.37 + \frac{548.89 - 535.37}{0.275 - 0.25} \cdot 0.02 = 546.19 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{1,VS} = h_{VS,0.25} + \frac{h_{VS,0.275} - h_{VS,0.25}}{0.275 - 0.25} \cdot (0.27 - 0.25) = 2716.9 + \frac{2721.3 - 2716.9}{0.275 - 0.25} \cdot 0.02 = 2720.42 \text{ kJ/kg}$$

da cui: $h_1 = (1 - 0.2) \cdot 546.19 + 0.2 \cdot 2720.42 = 981.04 \text{ kJ/kg}$

L'entalpia della massa di acqua liquida è invece pari a: $h_2 = 4.186 \cdot 80 = 334.94 \text{ kJ/kg}$

L'entalpia finale della miscela risulta dunque:

$$h_f = \frac{4 \cdot 981.04 + 2 \cdot 334.94}{4 + 2} = 765.67$$

Tale valore è compreso tra quelli di liquido e vapore saturo ($h_{1,LS}$ e $h_{1,VS}$) precedentemente calcolati per il vapore iniziale, per cui lo stato finale è una miscela liquido-vapore con titolo:

$$x = \frac{765.67 - 546.19}{2720.42 - 546.19} = 0.101$$

OSSERVAZIONI:

È stato dimostrato, che trasformazioni adiabatiche a pressione costante per un sistema semplificato chiuso, sono anche isoentalpiche. La cosa vale anche per i sistemi fluenti in condizioni stazionarie.

Esercizio 3.13

Argomento: Miscelamento di sostanze pure

In un cilindro adiabatico, chiuso da uno stantuffo sul quale agisce una pressione $p = 2 \text{ MPa}$, sono contenuti $M_v = 7 \text{ kg}$ di vapore surriscaldato alla temperatura di $T_v = 350 \text{ }^\circ\text{C}$ e $M_g = 3 \text{ kg}$ di ghiaccio alla temperatura di $T_g = -30 \text{ }^\circ\text{C}$. Individuare le condizioni dello stato finale e la variazione di entropia.

SOLUZIONE:

Dato che una trasformazione adiabatica e isobara è anche isoentalpica, si ha:

$$M_v \cdot h_v + M_g \cdot h_g = (M_v + M_g) \cdot h_f$$

da cui, noti:

- l'entalpia del vapore h_v da tabelle
- l'entalpia del ghiaccio $h_g = \Delta h_g + c_{p_g} \cdot T_g$

si ricava l'entalpia dello stato finale: $h_f = \frac{M_v \cdot h_v + M_g \cdot h_g}{M_v + M_g}$

Nota l'entalpia dello stato finale (e quindi noto lo stato finale), è possibile ricavare l'entropia specifica finale s_f .

La variazione totale di entropia è pari a:

$$S_{tot} = S_{tot_f} - S_{tot_i} = (M_v + M_g) \cdot s_f - (M_v \cdot s_v + M_g \cdot s_g)$$

dove:

- l'entropia del vapore h_v si ricava dalla tabelle
- l'entropia del ghiaccio è pari $s_g = \Delta h_g/T_{PT} + c_{p_g} \cdot \ln(T_g/T_{PT})$

RISULTATI NUMERICI:

Dalle tabelle del vapore d'acqua surriscaldato a $p = 2 \text{ MPa}$ e $T = 350 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$h_v = 3137.0 \text{ kJ/kg} \quad s_v = 6.9563 \text{ kJ/kgK}$$

L'entalpia del ghiaccio è: $h_g = -335 + (4.186/2) \cdot -30 = -397.80 \text{ kJ/kg}$

L'entalpia dello stato finale risulta quindi: $h_f = (7 \cdot 3137.0 + 3 \cdot -397.80)/(7 + 3) = 2076.56 \text{ kJ/kg}$

Il valore trovato è compreso tra quelli di liquido saturo h_{LS} e di vapore saturo h_{VS} , valutati a $p = 2 \text{ MPa}$. Per cui lo stato finale sarà una miscela liquido/vapore, il cui titolo è pari:

$$x = \frac{h_f - h_{LS}}{h_{VS} - h_{LS}} = \frac{2076.56 - 908.76}{2799.5 - 908.76} = 0.617$$

Noto il titolo, l'entropia del liquido e del vapore saturo a $p = 2 \text{ MPa}$ ($s_{LS} = 2.4474 \text{ kJ/kgK}$ e $s_{VS} = 6.3409 \text{ kJ/kgK}$), l'entropia dello stato finale è pari a:

$$s_f = (1 - 0.617) \cdot 2.4474 + 0.617 \cdot 6.3409 = 4.852 \text{ kJ/kgK}$$

L'entropia del ghiaccio è: $s_g = -335/273 + (4.186/2) \cdot (243/273) = -1.47 \text{ kJ/kgK}$

e quindi ΔS_{tot} risulta: $\Delta S_{tot} = (7 + 3) \cdot 4.852 - (7 \cdot 6.9563 + 3 \cdot -1.47) = 4.2383 \text{ kJ/K}$

OSSERVAZIONI:

1) Nella formula dell'entalpia del ghiaccio h_g , la temperatura è espressa in °C perchè è stato assunto come riferimento $h_g = 0$ a $T = 0 \text{ °C}$.

Se si volesse utilizzare la temperatura espressa in K, bisognerebbe utilizzare la seguente relazione:

$$h_g = \Delta h_g + c_{p_g} \cdot (T_g - T_{ref})$$

dove T_{ref} è la temperatura assunta come riferimento, pari a 273.15 K .

2) Volendo essere il più rigorosi possibile l'entalpia del ghiaccio andrebbe calcolata come:

$$h_g = h_{g_{ref}} + \Delta h_{g_{fus}} + c_{p_g} \cdot (T_g - T_{ref}) + v_g \cdot (p_g - p_{ref})$$

dove come, detto al punto 1) $h_{g_{ref}} = 0$, $T_{ref} = 0 \text{ °C}$ e $p_{ref} = 101325 \text{ N/m}^2$. L'ultimo addendo rappresenta il salto di entalpia dato dalla trasformazione isoterma a volume costante per spostarsi dalla pressione di riferimento (ovvero la pressione ambiente 1 atm) alla pressione data $p_g = 2 \text{ MPa}$. Tale contributo è sempre trascurato perchè molto piccolo rispetto agli altri, in questo caso vale $0.001 \cdot (2 \text{ MPa} - 0.1 \text{ MPa}) = 1.9 \text{ kJ}$

Altra osservazione da tenere a mente è che si sta utilizzando l'ipotesi che il calore specifico del ghiaccio c_{p_g} rimanga costante tra la temperatura di riferimento e quella data (-30 °C). Per un salto di poche decine di gradi come in questo caso va bene: $c_{p_g}(0\text{C}) = 2050 \text{ J/kgK}$ e $c_{p_g}(-30\text{C}) = 1882 \text{ J/kgK}$ differiscono solo del 9%, per valori molto più bassi rispetto alla temperatura di riferimento, durante la trasformazione isobara per spostarsi dalla temperatura di riferimento a quella data la variazione del calore specifico con la temperatura potrebbe essere non trascurabile.

Ultima considerazione, il modo più accurato per calcolare l'entalpia del ghiaccio è ricorrere alle tabelle, ipotizzando una trasformazione isoterma che va direttamente dal punto sulla curva di solido-vapore alla temperatura data (-30 °C) e pressione pari alla pressione di sublimazione a quella temperatura, fino al punto a pressione 2 MPa (alla medesima temperatura). Conoscendo la temperatura della trasformazione si può entrare nelle tabelle del ghiaccio e leggere la pressione del punto sulla curva e ricavare l'entalpia del ghiaccio alla temperatura data come:

$$h_g - h_{subl(T=-30\text{C})} = v_g \cdot (p_g - p_{subl(T=-30\text{C})})$$

Dove $p_{\text{subl}}(T=-30C)$ è la pressione di sublimazione del ghiaccio a -30°C letta dalle tabelle. Alla stessa riga si legge anche $h_{\text{subl}}(T=-30C)$ e si può ottenere l'entalpia finale del ghiaccio come:

$$h_g = h_{\text{subl}}(T=-30C) + v_g \cdot (p_g - p_{\text{subl}}(T=-30C))$$

Quando il salto di pressione $(p_g - p_{\text{subl}}(T=-30C))$ è piccolo si può trascurare tale contributo e una buona approssimazione è data semplicemente da:

$$h_g = h_{\text{subl}}(T=-30C)$$

Esercizio 3.14

Argomento: Miscelamento di sostanze pure

Un recipiente chiuso contiene acqua liquida a 25°C e vapore d'acqua saturo a 50°C . Per ciascuna fase è presente una massa pari a 1 kg. Durante il miscelamento tra le fasi, attraverso i contorni del recipiente la miscela cede all'ambiente esterno, che si trova ad una temperatura $T_e = 15^{\circ}\text{C}$, una quantità di calore pari a $Q = 1 \text{ kJ}$. Sapendo che il recipiente è costantemente mantenuto a pressione costante, determinare lo stato finale della miscela, la variazione entropica della sola miscela (commentandone il segno) e l'irreversibilità del processo (variazione totale di entropia del sistema isolato che permette la trasformazione descritta).

SOLUZIONE:

```
%DATI IN INPUT
```

```
Ml=1;
```

```
Mv=1;
```

```
Q=-1e3;
```

```
Te=15+273.15;
```

```
Tl=25+273.15;
```

```
Tv=50+273.15;
```

```
cpl=4186;
```

```
%DATO CHE IL PROCESSO E' ISOBARO, IL BILANCIO ENERGETICO DI INTERESSE
```

```
%E' QUELLO ENTALPICO, IN CUI IN QUESTO CASO DEVE COMPARIRE ANCHE IL
```

```
%CALORE SCAMBIATO CON L'ESTERNO
```

```
%CALCOLO CONDIZIONI INIZIALI
```

```
hl=cpl*(Tl-273.15);
```

```
hv=2592.1e3; %da tabella
```

```
sl=cpl*log(Tl/273.15);
```

```
sv=8.0763e3; %da tabella
```

```
%bilancio entalpico:
```

```
hm=(Ml*hl+Mv*hv+Q)/(Ml+Mv);
```

```
%confrontando il valore di hm con quello del liquido e del vapore saturi a  $50^{\circ}\text{C}$ ,
```

```
%si nota che il primo è intermedio tra i secondi, pertanto la miscela è nella
```

%regione bifase liquido-vapore a 50 °C. Si determina quindi il titolo:

hls=209.33e3; %da tabella

xm=(hm-hls)/(hv-hls);

%CALCOLO DELLA VARIAZIONE ENTROPICA

%della miscela:

svs=0.7038e3;

sm=xm*sv+(1-xm)*svs;

DSm=(Ml+Mv)*sm-(Ml*sl+Mv*sv);

%positiva malgrado sia una cessione di calore perchè domina l'entropia

%di miscelamento

%dell'ambiente:

DSe=-Q/Te;

%totale del sistema, isolato, miscela+ambiente:

DStot=DSm+DSe;

RISULTATI NUMERICI:

<i>DSe</i>	3.470	<i>DSm</i>	10.225	<i>DStot</i>	13.696	<i>Ml</i>	1
<i>Mv</i>	1	<i>Q</i>	-1000	<i>Te</i>	288.15	<i>Tl</i>	298.15
<i>Tv</i>	323.15	<i>cpl</i>	4186	<i>hl</i>	104650	<i>hls</i>	209330
<i>hm</i>	1347875	<i>hv</i>	2592100	<i>sl</i>	366.59	<i>sm</i>	4226.5
<i>sv</i>	8076.3	<i>svs</i>	703.8	<i>xm</i>	0.478		

Esercizio 3.15

Argomento: Gas reali

Determinare, per tre punti appartenenti alla curva limite (il punto critico e altri due) e per un punto nella regione dell'aeriforme surriscaldato, lo scostamento % tra i valori di volume specifico (note T e p) calcolabili attraverso l'equazione del gas ideale e l'equazione di Van der Waals e i valori "veri" sperimentali (la sostanza sia acqua).

SOLUZIONE:

Dall'equazione del gas ideale il volume specifico è: $v = R^* \cdot T/P$

mentre dall'equazione di Van der Waals: $P = \frac{R^*T}{v-b} - \frac{a}{v^2}$

dove: $a = 27/64 \cdot R^{*2} \cdot T_c^2/P_c$ e $b = 1/8 \cdot R^* \cdot T_c/P_c$

RISULTATI NUMERICI:

I punti appartenenti alla curva limite sono stati valutati a: $T = 373.15 \text{ K}$ e $T = 523.15 \text{ K}$

Il punto critico per l'acqua è a: $T_c = 647.29 \text{ K}$ $P_c = 22089 \text{ kPa}$

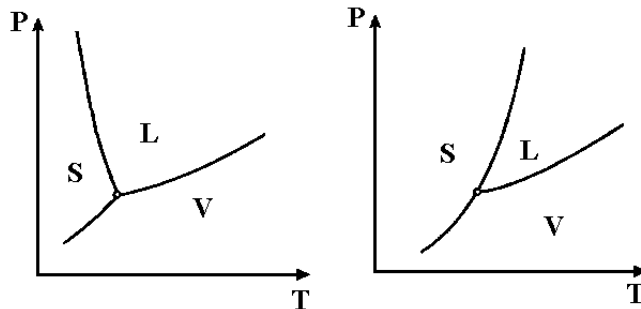
Nella regione dell'aeriforme surriscaldato è stato scelto il punto a: $T = 1173.15 \text{ K}$ $P = 100 \text{ kPa}$

T [C]	T [K]	P [kPa]	v_l [m^3/kg]	v_v [m^3/kg]	v_v GI	$E\%$ GI	v_v VdW	$E\%$ VdW
100.00	373.15	101.33	0.0010	1.6730	1.7010	1.67	1.69275	1.18
250.00	523.15	3980.32	0.0013	0.0496	0.0607	22.29	0.05482	10.42
374.14	647.29	22089.00	0.0032	0.0032	0.0135	329.00	0.00505	60.06
900.00	1173.15	100.00	-	5.4134	5.4186	0.10	5.417	0.070

Esercizio 3.16

Argomento: Equazione di Clausius-Clapeyron

Utilizzando l'equazione di Clausius-Clapeyron, indicare quale dei due diagrammi $P - T$ mostrati in figura è per una sostanza come l'acqua - che riduce il suo volume specifico passando dallo stato solido allo stato liquido - e quale invece è per una sostanza che durante la liquefazione vede aumentare il suo volume specifico.



SOLUZIONE:

L'equazione di Clausius-Clapeyron per la transizione di fase da solido a liquido può essere scritta come:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_l - s_s}{v_l - v_s} = \frac{h_l - h_s}{T(v_l - v_s)}$$

Essendo Δs e $\Delta h > 0$ durante la transizione di fase da solido a liquido, per una sostanza per la quale Δv è < 0 si avrà $dP/dT < 0$ e dunque il corretto diagramma $P - T$ qualitativo per l'acqua è quello di sinistra.

Primo Principio della Termodinamica per sistemi chiusi

Esercizio 4.1

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi

Un sistema chiuso subisce un incremento di energia interna di 125 kJ a fronte di un lavoro entrante di 460 kJ. Supponendo nulle le variazioni di energia potenziale e cinetica, determinare l'entità del calore scambiato esplicitando se entrante o uscente e adottando le diverse convenzioni di segno.

SOLUZIONE:

Nel caso proposto il primo principio della termodinamica in termini finiti contempla solamente i termini ΔU , Q , L che in base alle convenzioni di segno adottate sono così relazionati:

- | | |
|--|---------------------|
| a) Calore e lavoro positivi entranti | $\Delta U = +Q + L$ |
| b) Calore positivo entrante, lavoro positivo uscente | $\Delta U = +Q - L$ |
| c) Calore e lavoro positivi uscenti | $\Delta U = -Q - L$ |
| d) Calore positivo uscente, lavoro positivo entrante | $\Delta U = -Q + L$ |

RISULTATI NUMERICI:

Le unità di misura delle grandezze sono già nel sistema internazionale e quindi non necessitano alcuna conversione.

- | | |
|--|---------------------------|
| a) $Q = \Delta U - L = 125 - (+)460 = -335 \text{ kJ}$ | Negativo e quindi uscente |
| b) $Q = \Delta U + L = 125 + (-)460 = -335 \text{ kJ}$ | Negativo e quindi uscente |
| c) $Q = -\Delta U - L = -125 - (-)460 = +335 \text{ kJ}$ | Positivo e quindi uscente |
| d) $Q = -\Delta U + L = 125 + (+)460 = +335 \text{ kJ}$ | Positivo e quindi uscente |

OSSERVAZIONI:

Coerentemente con quanto precedentemente detto, si osserva come i risultati siano invarianti rispetto alle convenzioni di segno adottate fornendo la stessa informazione circa la direzione dell'interazione (in questo caso uscente).

Esercizio 4.2

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi

In un serbatoio sono contenuti 35 litri di un liquido di densità 920 kg/m^3 . Durante un intervallo di tempo pari a $\Delta\tau = 15$ minuti viene sottratta al liquido una potenza termica variabile nel tempo secondo la legge $|\dot{Q}| = 2 \cdot \tau + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \tau^2$. Determinare la potenza meccanica costante che deve essere scambiata per conferire al sistema un decremento di energia interna specifica di 18 kJ/kg .

SOLUZIONE:

Adottando per il liquido il modello di fluido incomprimibile, per esso non si hanno interazioni meccaniche di tipo dilatativo e pertanto la potenza meccanica scambiata è di tipo \dot{L}^* che, come tale, è solo entrante. L'indilatabilità del sistema comporta inoltre una variazione nulla di energia potenziale. Non essendo specificato né implicitamente né esplicitamente, si considera il serbatoio come contorno e non come sistema termodinamico che risulta pertanto essere costituito dal solo liquido. Considerando poi gli stati iniziale e finale assoggettati a velocità nulle e il sistema immobile, il bilancio energetico in termini di potenza ci fornisce:

$$\dot{L}^* \cdot \Delta\tau + \int \dot{Q} \cdot d\tau = \Delta U \quad \Rightarrow \quad \dot{L}^* = \frac{\Delta U}{\Delta\tau} - \frac{\int \dot{Q} \cdot d\tau}{\Delta\tau}$$

Conoscendo la variazione di energia interna specifica, per il calcolo di ΔU si deve determinare la massa:

$$M = V \cdot \rho$$

RISULTATI NUMERICI:

La relazione che esprime \dot{Q} è una relazione alfanumerica e pertanto deve essere specificata la misura, ovvero il sistema di unità di misura adottato per la quantificazione della parte numerica. Tali considerazioni devono sempre essere fatte quando si tratta di relazioni alfanumeriche tra grandezze di dimensioni non nulle. Non essendo specificato nel testo, si è pertanto autorizzati ad associare la relazione $\dot{Q} = 2 \cdot \tau + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \tau^2$ a qualsiasi sistema di misura e pensare quindi \dot{Q} espressa in W , $kcal/h$, BTU/h ecc. Supponendo allora per comodità che la relazione esprima la potenza nel SI, ovvero che il fattore numerico 2 sia espresso in W/s e il fattore numerico $2.5 \cdot 10^{-4}$ sia espresso in W/s^2 , si riportano anche tutte le altre unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$V = 35 \text{ l} = 35 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Delta\tau = 15 \text{ min} = 15 \cdot 60 = 900 \text{ s}$$

La massa di liquido contenuta nel serbatoio è: $M = 35 \cdot 10^{-3} \cdot 920 = 32.2 \text{ kg}$

Peraltro la variazione di energia interna risulta: $\Delta U = 32.2 \cdot -18 = -579.6 \text{ kJ}$

La potenza meccanica scambiata è (i segni negativi sono legati al fatto che la potenza termica è sottratta e l'energia interna decrementata):

$$\dot{L}^* = \frac{-579.6}{900} - \frac{\int (-\dot{Q}) \cdot d\tau}{900}$$

Essendo: $\int \dot{Q} \cdot d\tau = \int (2 \cdot \tau + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \tau^2) \cdot d\tau = 1 \cdot 900^2 + 0.833 \cdot 10^{-4} \cdot 900^3 = 870.73 \text{ kJ}$

Risulta: $\dot{L}^* = -0.64 + 0.97 = 0.33 \text{ kW}$

OSSERVAZIONI:

Il bilancio energetico (in termini di potenza) vuole positivi calore (potenza termica) e lavoro (potenza meccanica) entranti. Poiché U decresce e la potenza termica è uscente, il primo termine del secondo membro risulta negativo e il secondo termine positivo; da cui il risultato che essendo positivo sta a indicare che la potenza meccanica è entrante.

Esercizio 4.3

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi

Un sistema chiuso 1 subisce a seguito di un processo termodinamico una variazione di energia interna di 200 kJ. Durante tale processo il sistema assorbe dall'ambiente una quantità di calore pari a 1200 kcal e scambia lavoro con un secondo sistema chiuso 2 che presenta una variazione di energia interna di 3700 kJ. Verificare se il secondo sistema è adiabatico e in caso contrario calcolare il calore scambiato con l'esterno dichiarando se entrante o uscente.

SOLUZIONE:

Si ipotizza, non essendo diversamente specificato nel testo, che i sistemi siano immobili e non soggetti a variazioni di energia cinetica e potenziale e pertanto con riferimento al primo sistema, il bilancio energetico fornisce:

$$L_1 = \Delta U_1 - Q_1$$

dove si è indicato con L il generico lavoro scambiato non essendo indicato nel testo se dilatativo e/o no.

Per il secondo sistema l'adiabaticità è verificata se risulta:

$$-L_1 = L_2 = \Delta U_2$$

Si è supposto, come appare implicito nel testo, che il secondo sistema scambi lavoro solamente con il primo sistema.

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$Q = 1200 \text{ kcal} = 1200 \cdot 4.186 = 5023.2 \text{ kJ}$$

Per il primo sistema risulta: $L_1 = 200 - 5023.2 = -4823.2 \text{ kJ}$ (uscente)

Per il secondo sistema, invece: $L_2 = +4823.2 \neq 3700$ e pertanto il secondo sistema non è adiabatico.

Il calore scambiato con l'esterno risulta: $Q_2 = \Delta U_2 - L_2 = 3700 - 4823.2 = -1123.2 \text{ kJ}$ (uscente).

Esercizio 4.4

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi estesi

Una coppia cilindro stantuffo disposta verticalmente contiene un gas che occupa inizialmente un volume V_i di 9.5 litri con una densità ρ_i di 158 g/dm^3 . Sapendo che il gas subisce durante il processo termodinamico un incremento di energia interna di 50 kcal con un incremento di volume cui compete una variazione della quota iniziale del pistone di 500 mm e sapendo che nel sistema viene introdotta una quantità di calore pari a 450 kJ, determinare il lavoro scambiato sapendo che lo stesso è solamente di tipo dilatativo.

SOLUZIONE:

Si considera la coppia cilindro-stantuffo quale contorno (non essendo diversamente specificato, si ritiene che la coppia abbia massa nulla e quindi non costituisca sistema). Essendo specificata una variazione di quota si dovrà computare la corrispondente variazione di energia potenziale mentre l'energia cinetica, risultando implicitamente gli stati iniziali e finali a velocità nulla, non subirà alcuna variazione. Per quanto riguarda la variazione di energia potenziale essa è relativa al baricentro del sistema che, non essendo un corpo rigido, subisce una variazione di quota diversa da quella del pistone (qui semplicemente contorno). Pertanto il bilancio energetico diventa:

$$L_d + Q = \Delta U + \Delta E_p$$

dove:

$$\Delta E_p = M \cdot g \cdot (z_f - z_i)/2$$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$\Delta U = 50 \text{ kcal} = 50 \cdot 4.186 = 209.30 \text{ kJ}$$

$$z_f - z_i = 500 \text{ mm} = 0.5 \text{ m}$$

$$V_i = 9.5 \text{ l} = 9.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\rho_i = 158 \text{ g/dm}^3 = 158 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 158 \text{ kg/m}^3$$

La massa di gas è pari a: $M = 9.5 \cdot 10^{-3} \cdot 158 = 1.50 \text{ kg}$

Di conseguenza la variazione di energia potenziale ed il lavoro scambiato, sono rispettivamente:

$$\Delta E_p = 1.50 \cdot 9.81 \cdot 250 \cdot 10^{-3} = 3.68 \text{ J}$$

$$L_d = 209.30 + 3.68 \cdot 10^{-3} - 450 = -240.70 \text{ kJ}$$

OSSERVAZIONI:

Il segno del lavoro è negativo ad indicare (secondo il bilancio energetico) che esso è uscente, coerentemente col fatto che il sistema subisce un incremento di volume e quindi una espansione con conseguente cessione di lavoro all'esterno.

Si nota inoltre il modestissimo valore assoluto e il peso del tutto trascurabile dell'energia potenziale: questo fatto è tipico dei sistemi chiusi costituiti da aeriformi per i quali in generale la modesta densità (che genera piccole masse) e le modeste variazioni di quota comportano modesti valori assoluti della

variazione di energia potenziale. Inoltre gli scambi di calore e lavoro di tali sistemi sono generalmente tali da superare di diversi ordini di grandezza l'effetto dell'energia potenziale. Sotto questo profilo l'esempio è significativo in quanto pur trovandosi di fronte a volumi, variazioni di quota e densità ingegneristicamente rilevanti (per sistemi chiusi costituiti da aeriformi) associati a una modesta variazione di energia interna e a modeste energie in transito (calore e lavoro), il peso della variazione dell'energia potenziale è pari a 1.5 %.

Esercizio 4.5

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi composti

Un sistema è costituito da tre sottosistemi A, B, C. Il sottosistema A cede un calore $Q_{AB} = 300$ kcal al sottosistema B ed un lavoro $L_{AC} = 120$ kcal al sottosistema C. Il sottosistema C fornisce un lavoro $L_{CB} = 230$ kJ al sottosistema B e un calore $Q_{CA} = 1300$ kJ al sotto sistema A. Si chiede di determinare le variazioni di energia interna dei tre sottosistemi e del sistema totale (composto).

SOLUZIONE:

Non essendo propriamente specificato, si ipotizza di considerare i sottosistemi immobili e di trascurare per essi la variazione di energia cinetica. Inoltre, mancando informazioni specifiche, risulta implicito che il sistema complessivo, somma dei tre sottosistemi, risulta *isolato* per cui si ha:

- Per l'i-esimo sottosistema (dove non si è distinto tra L_d e L^* non avendo dal testo informazioni in merito):

$$\delta Q_i + \delta L_i = \Delta U$$

- Per il sistema totale - isolato - ricordando la proprietà associativa dell'energia interna, si ha:

$$dU = \sum dU_i = 0$$

e pertanto la seconda domanda ha una risposta immediata.

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$Q_{AB} = 300 \text{ kcal} = 300 \cdot 4.186 = 1255.8 \text{ kJ}$$

$$L_{AC} = 120 \text{ kcal} = 120 \cdot 4.186 = 502.3 \text{ kJ}$$

La variazione di energia interna dei singoli sottosistemi è:

- $\Delta U_A = -Q_{AB} - L_{AC} + Q_{CA} = -1255.8 - 502.3 + 1300 = -458.1 \text{ kJ}$
- $\Delta U_B = +Q_{AB} + L_{CB} = +1255.8 + 230 = +1485.8 \text{ kJ}$
- $\Delta U_C = +L_{AC} - Q_{CA} - L_{CB} = +502.3 - 1300 - 230 = -1027.7 \text{ kJ}$

La variazione di energia interna del sistema composto (isolato), risulta automaticamente verificata:

$$\Delta U_{totale} = \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C = -458.1 + 1485.8 - 1027.7 = 0 \text{ kJ}$$

Esercizio 4.6

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi composti

Un sistema rigido e adiabatico è diviso, tramite un setto fisso, rigido e diabatico di massa $M_3 = 2.5$ kg, in due semi volumi di cui uno il triplo dell'altro. Il semi volume più piccolo V_1 è di 2.8 dm^3 ed è riempito con un gas di densità pari a 48 kg/m^3 , mentre l'altro semi volume V_2 è occupato da un liquido di densità 875 g/dm^3 . A partire dallo stato iniziale di equilibrio viene azionato all'interno del semi volume V_2 e per la durata di 45 minuti un agitatore alimentato da una potenza (espressa in W) funzione del tempo secondo la legge $\dot{L}^* = 300 - 0.06 \cdot \tau$.

Dopo lo spegnimento dell'agitatore ed il raggiungimento di un nuovo stato di equilibrio, determinare rispetto allo stato iniziale la variazione di energia interna totale dell'intero sistema, quella dei singoli sotto sistemi e i calori scambiati tra il setto, il liquido e il gas. Sono noti i calori specifici a volume costante c_v del setto, del liquido e del gas che valgono rispettivamente 1.8, 1.2 e 0.4 kcal/kgK.

SOLUZIONE:

Poiché il setto è caratterizzato da una certa massa e pertanto non è un contorno, la struttura si presenta quale sistema composto da tre sotto sistemi per i quali si può dire che:

- Il setto (sistema 3) può scambiare calore con il gas ($Q_{3,1}$) e con il liquido ($Q_{3,2}$) e non presenta alcuna interazione meccanica.
- Il gas (sistema 1) interagisce solo in termini di calore con il setto ($Q_{1,3}$).
- Il liquido (sistema 2) scambia lavoro di tipo L^* con l'esterno e calore con il setto ($Q_{3,2}$).
- Il sistema totale (essendo rigido e adiabatico) scambia solo lavoro di tipo L^* con l'esterno.

Ovviamente per tutti i sotto sistemi e per il sistema totale non si hanno variazioni di energia cinetica e potenziale.

Pertanto il primo principio in termini di potenza applicato all'intero sistema totale fornisce la prima immediata risposta:

$$\Delta U_T = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = \int \dot{L}^* \cdot d\tau$$

Per quanto concerne le variazioni di energia interna dei singoli sottosistemi, si dispone del bilancio di conservazione dell'energia ad essi relativo e cioè:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= Q_{3,1} \\ \Delta U_2 &= \int \dot{L}^* \cdot d\tau - Q_{2,3} \\ \Delta U_3 &= +Q_{2,3} - Q_{3,1}\end{aligned}$$

Una delle ultime tre relazioni è ricavabile dal primo principio per il sistema totale, che risulta essere una combinazione dei bilanci di conservazione dell'energia dei singoli sottosistemi. Ci si trova di fronte pertanto a un sistema di tre equazioni in cinque incognite (tre energie interne e due calori). La chiusura del problema è fornita dall'osservare che nello stato iniziale e finale, che sono stati di equilibrio, i tre sottosistemi si trovano tutti alla stessa temperatura ovvero subiranno tutti la stessa differenza di temperatura ΔT . Essendo i tre sotto sistemi rigidi, la loro evoluzione termodinamica avviene a volume costante e pertanto le variazioni di energia interna sono espresse dalla relazione:

$$\Delta U_i = M_i \cdot c_{v_i} \cdot \Delta T = V_i \cdot \rho_i \cdot c_{v_i} \cdot \Delta T \quad i = 1 \div 3$$

Aggiungendo cioè altre tre equazioni e un'altra incognita (ΔT), il sistema diventa a sei equazioni in sei incognite.

Dal primo principio applicato all'intero sistema è quindi possibile esprimere ΔT come:

$$\Delta T = \left(1 / \sum_{i=1}^3 M_i \cdot c_{v_i} \right) \cdot \int \dot{L}^* \cdot d\tau$$

Noto ΔT , dai bilanci di energia dei singoli sottosistemi, sostituendo i ΔU_i , si ricavano i calori scambiati e successivamente le variazioni di energia interna.

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2.8 \text{ dm}^3 = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ \rho_2 &= 875 \text{ g/dm}^3 = 875 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 875 \text{ kg/m}^3 \\ \tau &= 45 \text{ min} = 45 \cdot 60 = 2700 \text{ s} \\ c_{v_3} &= 1.8 \text{ kcal/kgK} = 1.8 \cdot 4.186 = 7.53 \text{ kJ/kgK} \\ c_{v_2} &= 1.2 \text{ kcal/kgK} = 1.2 \cdot 4.186 = 5.02 \text{ kJ/kgK} \\ c_{v_3} &= 0.4 \text{ kcal/kgK} = 0.4 \cdot 4.186 = 1.67 \text{ kJ/kgK} \end{aligned}$$

Dal primo principio applicato all'intero sistema si ottiene:

$$\Delta U_T = \int (300 - 0.06 \cdot \tau) \cdot \tau \cdot d\tau = 300 \cdot 2700 - 0.06 \cdot 2700^2 / 2 = 591.3 \text{ kJ}$$

Si ricava dunque il ΔT , pari a:

$$\Delta T = \frac{1}{2.8 \cdot 10^{-3} \cdot 48 \cdot 1.67 + 8.4 \cdot 10^{-3} \cdot 875 \cdot 5.02 + 2.5 \cdot 7.53} \cdot 591.3 = 10.57 \text{ C}$$

I calori scambiati risultano essere:

$$\begin{aligned} Q_{2,3} &= 591.3 - (8.4 \cdot 10^{-3} \cdot 875 \cdot 5.02) \cdot 10.57 = 201.30 \text{ kJ} \\ Q_{3,1} &= (2.8 \cdot 10^{-3} \cdot 48 \cdot 1.67) \cdot 10.57 = 2.37 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Le variazioni di energia interna dei singoli sottosistemi sono:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= (2.8 \cdot 10^{-3} \cdot 48 \cdot 1.67) \cdot 10.57 = 2.37 \text{ kJ} \\ \Delta U_2 &= (8.4 \cdot 10^{-3} \cdot 875 \cdot 5.02) \cdot 10.57 = 390 \text{ kJ} \\ \Delta U_3 &= (2.5 \cdot 7.53) \cdot 10.57 = 199 \text{ kJ} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI:

La somma delle ΔU_i , ricavate alla luce del primo principio relativo ai singoli "i" sotto sistemi, coincide, a meno di errori di troncamento, con la ΔU_T ricavata dal primo principio relativo al sistema totale, coerentemente col fatto che per l'energia interna, che è una grandezza estensiva, vale la proprietà associativa.

Si osserva inoltre che la variazione di energia interna del gas è notevolmente inferiore alle altre essenzialmente per la ridotta massa di questo. Per contro in termini specifici le tre Δu sono dello stesso ordine di grandezza e stanno nel rapporto dei calori specifici a volume costante. Risulta infatti: $\Delta u_1 = 17.63 \text{ kJ/kg}$, $\Delta u_2 = 53.06 \text{ kJ/kg}$, $\Delta u_3 = 79.59 \text{ kJ/kg}$.

Esercizio 4.7

Argomento: Primo Principio per sistemi chiusi estesi

Tre sfere aventi diametro di 20 cm e caratteristiche fisiche riportate in tabella vengono lanciate con una velocità costante di 200 m/s contro un bersaglio rigido. Determinare per le tre sfere sia la variazione di energia interna totale e specifica dopo l'urto, supposto anelastico, sia la rispettiva variazione di temperatura.

	ρ [kg/m ³]	c_v kcal/kgK
Sfera 1 (piombo)	11290	0.03
Sfera 2 (alluminio)	2710	0.208
Sfera 3 (ottone)	8520	0.092

SOLUZIONE:

Considerando quale condizione iniziale della sfera quella assunta un istante prima dell'impatto anelastico e come condizione finale quella assunta un istante dopo, risulta trascurabile e al limite nulla la variazione di energia potenziale, mentre la variazione di energia cinetica risulta pari all'energia cinetica iniziale essendo nulla la velocità dopo l'urto. Per quanto riguarda le forze esterne che possono promuovere, stante il movimento del sistema, il lavoro L_m , esse sono nulle dal momento che la sfera, dal nostro istante iniziale a quello finale, procede a velocità costante e quindi la risultante delle forze esterne (tipicamente data dalla forza di lancio originaria e dalla resistenza d'attrito) risulta essere nulla. Supponendo inoltre il contorno della sfera adiabatico e rigido, il primo principio fornisce le relazioni:

$$dU = -1/2 \cdot M \cdot dw^2$$

$$du = -1/2 \cdot dw^2 = dU/M$$

$$dT = du/c_v$$

dove: $M = 1/6 \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$d = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$c_{v1} = 0.03 \text{ kcal/kgK} = 0.03 \cdot 4.186 = 0.126 \text{ kJ/kgK}$$

$$c_{v2} = 0.208 \text{ kcal/kgK} = 0.208 \cdot 4.186 = 0.871 \text{ kJ/kgK}$$

$$c_{v3} = 0.092 \text{ kcal/kgK} = 0.092 \cdot 4.186 = 0.385 \text{ kJ/kgK}$$

La massa delle 3 sfere è:

$$M_1 = 1/6 \cdot \pi \cdot 0.2^3 \cdot 11290 = 47.29 \text{ kg}$$

$$M_2 = M_1 \cdot 2710/11290 = 11.35 \text{ kg}$$

$$M_3 = M_1 \cdot 8520/11290 = 35.69 \text{ kg}$$

La variazione di energia interna risulta:

$$\Delta U_1 = -1/2 \cdot (-200^2) \cdot 47.29 = 945.80 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 \cdot 11.35/47.29 = 227.00 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_3 = \Delta U_1 \cdot 35.69/47.29 = 713.80 \text{ kJ}$$

mentre la variazione di energia interna specifica è pari a:

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = -1/2 \cdot (-200^2) = 20 \text{ kJ/kg}$$

La variazione di temperatura delle 3 sfere è:

$$\Delta T_1 = 20/0.126 = 158.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_2 = 20/0.871 = 23.0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_3 = 20/0.385 = 51.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

OSSERVAZIONI:

Dopo l'urto la sfera subisce una deformazione che risulta essere a volume costante e che, come tale, non è associata a un lavoro dilatativo. Essa da un punto di vista puramente meccanico è associata a un lavoro di deformazione coincidente con la variazione di energia cinetica; dal punto di vista termodinamico, viene a coincidere con la variazione di energia interna. Tale valore risulta massimo nel caso di urto anelastico (come nel caso in esame) mentre risulta nullo nel caso di urto perfettamente elastico dove la velocità finale (dopo l'urto) è uguale e contraria a quella iniziale (prima dell'urto) talché la variazione di energia interna risulta nulla.

Si osserva inoltre che le differenti variazioni (incrementi) di temperatura delle tre sfere risultano, a pari velocità, inversamente proporzionali al calore specifico a volume costante (c_v). Il valore piuttosto elevato della temperatura finale è legato all'elevata velocità (che per altro compare al quadrato): se per esempio la velocità fosse 18 m/s (64.8 km/h) risulterebbe $\Delta u = 162 \text{ W}$ e conseguentemente $\Delta T_1 = 1.29 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta T_2 = 0.19 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta T_3 = 0.42 \text{ }^\circ\text{C}$.

Esercizio 4.8

Argomento: Primo Principio e coefficienti termovolumetrici

Un recipiente chiuso e perfettamente rigido e adiabatico, di volume $V = 0.5 \text{ l}$, è inizialmente pieno di acqua a pressione atmosferica e temperatura $T_{ai} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Nel recipiente vengono immerse due sfere di rame ($\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$, $c_V \approx c_P = 385 \text{ J/kgK}$), entrambe di diametro $D = 50 \text{ mm}$ e aventi temperatura $T_{1i} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ la prima e $T_{2i} = 150 \text{ }^\circ\text{C}$ la seconda.

A causa dell'immersione delle sfere, un corrispondente volume di liquido esce dal recipiente che viene poi immediatamente richiuso dopo l'immersione. Trascurando l'eventuale evaporazione locale dell'acqua:

1. ipotizzando che sia l'acqua sia le sfere siano approssimabili a perfettamente incompressibili, determinare la temperatura finale del sistema liquido + sfere una volta raggiunto lo stato di equilibrio, e la corrispondente variazione totale di entropia rispetto allo stato iniziale.
2. ipotizzando invece che il contenitore sia flessibile, le sfere perfettamente incompressibili e l'acqua caratterizzata da un coefficiente di dilatazione isobara $k_P = 2.1 \cdot 10^{-4}$ (approssimabile a costante con la temperatura) e che l'ambiente esterno sia a 1 bar, determinare il lavoro scambiato dal sistema tra inizio e fine del raffreddamento delle sfere.

SOLUZIONE:

%DATI IN INPUT

```

P=1e5;
rhoCu=8900;
cvCu=385; %=cp
rhoH2O=1000;
cvH2O=4186; %=cp
vH2Oi=1e-3;
D=50e-3;
T1i=200+273.15;
T2i=150+273.15;
TH2Oi=10+273.15;
Vltot=0.5e-3;
kp=2.1e-4;

%SOLUZIONE
%calcolo del volume di acqua rimasta nel serbatoio dopo che un po' ne
%esce causa immersione delle sfere

Vs1=4/3*pi*(D/2)^3;
Vs2=Vs1;
Vl=Vltot-Vs1-Vs2;

%massa delle sfere e dell'acqua
Ms1=rhoCu*Vs1;
Ms2=Ms1;

MH2O=Vl*rhoH2O;

%calcolo della temperatura finale del sistema, da scambio termico in un
%sistema isocoro
Tf=(MH2O*cvH2O*TH2Oi+Ms1*cvCu*T1i+Ms2*cvCu*T2i)/(MH2O*cvH2O+Ms1*cvCu+Ms2*cvCu);

%calcolo della variazione entropica del sistema, costituito da acqua e sfere
DS=MH2O*cvH2O*log(Tf/TH2Oi)+Ms1*cvCu*log(Tf/T1i)+Ms2*cvCu*log(Tf/T2i);

%calcolo del lavoro scambiato, considerando la comprimibilità dell'acqua
%da  $kp=1/v*(dv/dT)|P$  si ottiene:
vH2Of=vH2Oi*exp(kp*(Tf-TH2Oi));
l=-P*(vH2Of-vH2Oi);
L=MH2O*l;

```

<i>D</i>	0.05	<i>DS</i>	40.358	<i>L</i>	-0.2889	<i>MH2O</i>	0.3691
<i>Ms1</i>	0.5825	<i>Ms2</i>	0.5825	<i>P</i>	100000	<i>T1i</i>	473.15
<i>T2i</i>	423.15	<i>TH2Oi</i>	283.15	<i>Tf</i>	320.27	<i>Vl</i>	0.000369
<i>Vltot</i>	0.0005	<i>Vs1</i>	0.000065	<i>Vs2</i>	0.000065	<i>cpCu</i>	385
<i>cpH2O</i>	4186	<i>kp</i>	0.00021	<i>l</i>	-0.7826	<i>rhoCu</i>	8900
<i>rhoH2O</i>	1000	<i>vH2Of</i>	0.001008	<i>vH2Oi</i>	0.001000		

Esercizio 5.1

Argomento: Sistemi fluenti

In un condotto di sezione circolare caratterizzato da un brusco aumento della sezione stessa scorre acqua liquida in regime stazionario, con portata sufficiente a riempire completamente il condotto stesso. Nel primo tratto, a monte della singolarità, il diametro della sezione del condotto è $D_1 = 0.5$ m e la velocità dell'acqua è $w_1 = 10$ m/s; nel secondo tratto, a valle della singolarità, il diametro della sezione del condotto diventa $D_2 = 1$ m. Calcolare la velocità w_2 con cui fluisce l'acqua in questo secondo tratto.

SOLUZIONE:

Impostando la conservazione della massa tra le sezioni 1 e 2 si ottiene: $\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2$

da cui la velocità nel secondo tratto: $w_2 = w_1 \cdot (D_1/D_2)^2$

RISULTATI NUMERICI:

La velocità nel secondo tratto è pari a: $w_2 = 10 \cdot (1/2)^2 = 2.5$ m/s

Esercizio 5.2

Argomento: Sistemi fluenti

In un sistema aperto adiabatico, orizzontale operante in regime stazionario fluisce una portata massica di aria ($c_p = 1$ kJ/kgK, $M_M = 29$ kg/kmol) pari a 0.2 kg/s; nella sezione d'ingresso si ha una temperatura T_i di 50 °C, una pressione P_i di 5 bar e una velocità media w_i di 40 m/s, mentre nella sezione di uscita si ha una velocità $w_u = 100$ m/s e una pressione P_u di 3 bar. Sapendo che al fluido viene fornita una potenza di 6 kW, determinare la temperatura nella sezione di uscita e le aree delle sezioni di ingresso e di uscita.

SOLUZIONE:

Non essendo meglio specificato, assumiamo la potenza entrante quale somma dei contributi \dot{L}_d e \dot{L}^* , chiamandola genericamente \dot{E} ; inoltre essendo il sistema disposto orizzontalmente risulta nullo il contributo gravitazionale per cui dal primo principio risulta:

$$\dot{M} \cdot (w^2/2 + h)_u = \dot{M} \cdot (w^2/2 + h)_1 + \dot{E}$$

ricavata la differenza di entalpia e considerando il gas con comportamento ideale si ha:

$$T_u = T_i + \left[\dot{E}/\dot{M} + (w_i^2 - w_u^2)/2 \right] / c_p$$

Per la determinazione delle aree di ingresso e uscita si ricorre all'equazione di continuità, previa determinazione della densità dell'aeriforme tramite la sua equazione di stato. Risulta pertanto:

$$A = \dot{M}/(\rho \cdot w) = \dot{M} \cdot (R^* \cdot T/P)/w$$

LISTATO MATLAB PER LA SOLUZIONE:

```
%DATI
cp=1000;
MM=29;
M=0.2;
Ti=50+273.15;
Pi=5e5;
wi=40;
Pu=3e5;
wu=100;
E=6e3;

%SOLUZIONE
%dal bilancio energetico
Dh=E/M+(wi^2-wu^2)/2;
Tu=Ti+Dh/cp;

%sezioni di passaggio
Rs=8314/MM;
rhoi=Pi/(Rs*Ti);
rhou=Pu/(Rs*Tu);
Ai=M/(rhoi*wi);
Au=M/(rhou*wu);

%Di=sqrt(4*(Ai/pi));
%Du=sqrt(4*(Au/pi));
```

RISULTATI NUMERICI:

OSSERVAZIONI:

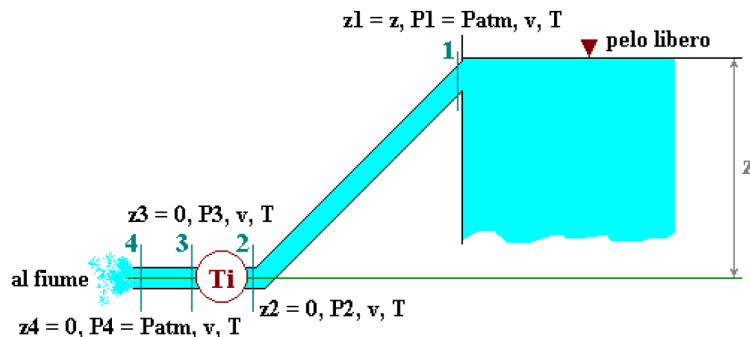
Provare a ripetere il calcolo senza fornire potenza termica, per verificare cosa succede al fluido (risposta: si raffredda).

A_i	0.000926	A_u	0.000667	D_h	25800.000000	E	6000.000000
M	0.200000	MM	29.000000	P_i	500000.000000	P_u	300000.000000
R_s	286.689655	T_i	323.150000	T_u	348.950000	cp	1000.000000
ρ_{hoi}	5.397017	ρ_{hou}	2.998790	w_i	40.000000	w_u	100.000000

Esercizio 5.3

Argomento: Centrale idroelettrica

Si consideri la centrale idroelettrica schematizzata in figura. Calcolare la potenza \dot{L} ottenibile dalla turbina idraulica nell'ipotesi che il salto di quota z sia pari a 100 m e la portata massica d'acqua che scorre nella condotta forzata e viene processata dalla turbina stessa sia $\dot{M} = 100 \text{ kg/s}$.



SOLUZIONE:

Approssimando:

- l'acqua a liquido incomprimibile
- trascurando qualsiasi perdita di carico e riscaldamento dovuto agli attriti
- la condotta e la turbina adiabatiche
- la condotta a diametro costante e pari a quello delle sezioni di ingresso ed uscita dalla turbina

l'espressione del primo principio si riduce a:

$$\dot{M} \cdot (g \cdot z_i + p_i \cdot v_i) + \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot (g \cdot z_u + p_u \cdot v_u)$$

Vediamo ora l'influenza della scelta del contorno del sistema.

Se si scelgono le sezioni 1 e 4: $z_1 \neq z_4$ e $p_1 = p_4$

e quindi risulta:

$$\dot{M} \cdot (g \cdot z_1 + p \cdot v) + \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot (g \cdot z_4 + p \cdot v) \quad \implies \quad \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot g \cdot (z_4 - z_1) = -\dot{M} \cdot g \cdot z$$

Se invece si scelgono le sezioni 2 e 3: $z_2 = z_3$ e $p_2 \neq p_3$

e quindi risulta:

$$\dot{M} \cdot (g \cdot z + p_2 \cdot v) + \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot (g \cdot z + p_3 \cdot v) \quad \implies \quad \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot (p_3 - p_2) \cdot v$$

ma: $p_2 = p_1 - \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = p_1 - \rho \cdot g \cdot (z_3 - z_1)$

e: $p_3 = p_4 = p_1$

Dunque: $\dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot [p_3 - p_1 + \rho \cdot g \cdot (z_3 - z_1)] \cdot v = \dot{M} \cdot g \cdot (z_3 - z_1) = -\dot{M} \cdot g \cdot z$

RISULTATI NUMERICI:

Se si scelgono le sezioni 1 e 4: $\dot{L}_{ut} = -100 \cdot 9.81 \cdot 100 = -98100 \text{ J/s}$ uscente

mentre con le sezioni 2 e 3: $\dot{L}_{ut} = -100 \cdot 9.81 \cdot 100 = -98100 \text{ J/s}$ uscente

OSSERVAZIONI:

La scelta del contorno del sistema può influenzare il procedimento di calcolo, che può diventare più o meno semplice o complesso, ma non il risultato.

Esercizio 5.4

Argomento: Turbina

In una turbina in cui il fluido di lavoro è vapor d'acqua si verifica un'espansione adiabatica dalla pressione $p_1 = 1 \text{ MPa}$ alla pressione $p_2 = 0.1 \text{ MPa}$. Sapendo che la temperatura T_1 del vapor d'acqua in ingresso alla turbina è di 900 K , e che le sezioni in ingresso e uscita sono state dimensionate in modo che risulti $w_1 = w_2$, calcolare il lavoro specifico fornito dalla turbina:

- *approssimando il vapor d'acqua a gas perfetto e la trasformazione a isoentropica*
- *utilizzando le tabelle dell'acqua ed approssimando la trasformazione a isoentropica*
- *utilizzando le tabelle dell'acqua e sapendo che la turbina ha un rendimento isoentropico di 0.85*

SOLUZIONE:

Scrivendo il bilancio di energia per il sistema aperto turbina (in termini di potenza):

$$\dot{M}_1 \cdot (w_1^2/2 + g \cdot z_1 + u_1 + p_1 \cdot v_1) + \dot{Q} + \dot{L}_{ut} = \dot{M}_2 \cdot (w_2^2/2 + g \cdot z_2 + u_2 + p_2 \cdot v_2)$$

con le semplificazioni: $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$ $z_1 = z_2$ $w_1 = w_2$ $\dot{Q} = 0$

ed introducendo l'entalpia: $h = u + p \cdot v$

si ottiene: $h_1 + \dot{L}_{ut}/\dot{M} = h_2$ \implies $\dot{L}_{ut}/\dot{M} = l_{ut} = h_2 - h_1$

Approssimando il vapor d'acqua a gas perfetto $p \cdot v = R^* \cdot T$ e la trasformazione a isoentropica $p \cdot v^\gamma = \text{cost}$, è possibile ricavare la temperatura di fine espansione:

$$p \cdot (R^* \cdot T/p)^\gamma = \text{cost} \quad \implies \quad T \cdot p^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \implies \quad T_2 = T_1 \cdot (p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

il lavoro utile specifico risulta: $l_{ut} = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

Utilizzando le tabelle dell'acqua ed approssimando la trasformazione a isoentropica è immediato ricavare il lavoro specifico fornito dalla turbina:

$$l_{ut} = h_2 - h_1$$

con i valori delle entalpie h_1 ed h_2 letti dalle tabelle.

Se la turbina non è ideale, ma ha un rendimento isoentropico inferiore a 1:

$$\eta_{iso} = (h_2 - h_1)/(h_{2,iso} - h_1) \quad \implies \quad l_{ut} = h_2 - h_1 = \eta_{iso} \cdot (h_{2,iso} - h_1)$$

RISULTATI NUMERICI:

Approssimando l'acqua a gas perfetto triatomico non lineare risulta:

$$\begin{aligned} c_p &= 4 \cdot 8314/18 = 1848 \text{ J/kgK} \\ \gamma &= c_p/c_v = 4/3 = 1.333 \\ T_2 &= 900 \cdot (1/0.1)^{-0.333/1.333} = 506.3 \text{ K} \\ l_{ut} &= 1848 \cdot (506.3 - 900) = -727.5 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Utilizzando le tabelle dell'acqua si ottiene:

$$\begin{aligned} h_1 &\cong 3755 \text{ kJ/kg} \quad \text{valutata a } T_1 = 900 \text{ K} \quad \text{e } p_1 = 1 \text{ MPa} \\ h_2 &\cong 3010 \text{ kJ/kg} \quad \text{valutata a } s_2 = s_1 \quad \text{e } p_2 = 0.1 \text{ MPa} \\ \text{e quindi: } l_{ut} &= 3010 - 3755 = -745 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Se la turbina non è ideale, invece: $l_{ut} = 0.85 \cdot (3010 - 3755) = -633.25 \text{ kJ/kg}$

OSSERVAZIONI:

Provare a rifare i calcoli con le tabelle e con il gas perfetto partendo da $p_1 = 0.1 \text{ bar}$ e $T_1 = 900 \text{ K}$ e arrivando a $p_2 = 0.01 \text{ bar}$. La differenza tra i due approcci è maggiore o minore del caso precedente?

Esercizio 5.5

Argomento: Turbina ideale

Una turbina senza attriti processa aria secca (portata massica $\dot{M} = 5 \text{ kg/s}$, portata volumica $\dot{V} = 2 \text{ m}^3/\text{s}$) che subisce una trasformazione politropica di indice $k = 1.75$. Le condizioni di uscita sono $P_u = 1 \text{ bar}$, $T_u = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare la potenza fornita dalla turbina in condizioni stazionarie.

Dal Primo Principio per sistemi fluenti in condizioni stazionarie e trascurando le variazioni di quota e velocità, per una turbina ideale si ha:

$$l_{ut\ is} = h_u - h_i - q \quad ; \quad \dot{L}_{ut\ is} = \dot{M} (h_u - h_i - q)$$

dove

$$q = c_x (T_u - T_i) = \frac{kc_V - c_P}{k - 1} (T_u - T_i)$$

Quindi:

$$l_{ut\ is} = \dot{M} (c_P - c_x) (T_u - T_i)$$

Per calcolare T_i si parte dalla densità in ingresso $\rho_i = \dot{M}/\dot{V}$, da quella in uscita $\rho_u = R^*T_u/P_u$ e dall'equazione delle trasformazioni politropiche in coordinate (T, v) (che è $Tv^{k-1} = \text{cost}$). Si ha:

$$T_i = T_u (\rho_u / \rho_i)^{1-k}$$

LISTATO MATLAB PER LA SOLUZIONE:

```
%dati
M=5;
V=2;
k=1.75;
Pu=1e5;
Tu=10+273.15;

%soluzione
Rs=8314/29;
rhoi=M/V;
rhou=Pu/(Rs*Tu);
Ti=Tu*(rhou/rhoi)^(1-k);

cv=5/2*Rs;
cp=7/2*Rs;
cx=(k*cv-cp)/(k-1);

q=cx*(Tu-Ti);
lut_is=cp*(Tu-Ti);
lut=lut_is-q;

Lut=M*lut;
```

<i>Lut</i>	-663226.196708	<i>M</i>	5.000000	<i>Pu</i>	100000.000000	<i>Rs</i>	286.689655
<i>Ti</i>	481.440935	<i>Tu</i>	283.150000	<i>V</i>	2.000000	<i>cp</i>	1003.413793
<i>cv</i>	716.724138	<i>cx</i>	334.471264	<i>k</i>	1.750000	<i>lut</i>	-132645.239342
<i>lut_is</i>	-198967.859012	<i>q</i>	-66322.619671	<i>rhoi</i>	2.500000	<i>rhou</i>	1.231889

Esercizio 5.6

Argomento: Condotto convergente

Un condotto convergente orizzontale, liscio, rigido ed adiabatico è percorso dalla portata \dot{M} di un liquido ideale in regime stazionario. Sono note $w_1 = 1 \text{ m/s}$, $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $p_1 = 5 \text{ bar}$, $A_1 = 0.196 \text{ m}^2$, $A_2 = 0.00785 \text{ m}^2$ e si supponga uniforme la velocità del fluido nelle rispettive sezioni. Si calcolino la pressione e la velocità in uscita dal condotto.

SOLUZIONE:

Dall'equazione di conservazione della massa, dato che il fluido è incomprimibile ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), si ricava la velocità in uscita dal condotto:

$$\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2 \quad \implies \quad w_2 = w_1 \cdot A_1 / A_2$$

Scrivendo il bilancio di energia per il sistema aperto condotto convergente (in termini di potenza):

$$\dot{M}_1 \cdot (w_1^2/2 + g \cdot z_1 + u_1 + p_1 \cdot v_1) + \dot{Q} - \dot{L} = \dot{M}_2 \cdot (w_2^2/2 + g \cdot z_2 + u_2 + p_2 \cdot v_2)$$

ma essendo:

- il fluido incomprimibile: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$
- la massa in ingresso uguale a quella in uscita: $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$
- il deflusso adiabatico ed il fluido ideale: $\dot{Q} = 0$ e $u_1 = u_2$
- lo scambio di potenza meccanica nullo: $\dot{L} = 0$
- la variazione di altezza nulla: $g \cdot z_1 = g \cdot z_2 = 0$

il bilancio si riduce alla seguente relazione:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot w_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot w_2^2$$

in cui l'unica incognita è la pressione in uscita dal condotto p_2 , pari a:

$$p_2 = p_1 + 1/2 \cdot \rho \cdot (w_1^2 - w_2^2)$$

RISULTATI NUMERICI:

La velocità del fluido in uscita dal condotto è pari a:

$$w_2 = 1 \cdot (0.196/0.00785) = 25 \text{ m/s}$$

mentre la pressione in uscita risulta:

$$p_2 = 5 \cdot 10^5 + 1/2 \cdot 1000 \cdot (1^2 - 25^2) = 188000 \text{ Pa} = 1.88 \text{ bar}$$

Esercizio 5.7

Argomento: Compressore

Un compressore ideale adiabatico comprime $\dot{V}_i = 1500 \text{ m}^3/\text{h}$ di aria dalla pressione $p_i = 1 \text{ atm}$ alla pressione $p_u = 12 \text{ at}$. La temperatura dell'aria all'ingresso del compressore è $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Si calcoli:

1. la potenza richiesta dal compressore e la temperatura dell'aria all'uscita dal compressore
2. la potenza richiesta nel caso in cui si supponga di dividere la compressione in due stadi con uguale rapporto di compressione e di effettuare una refrigerazione intermedia del gas fino alla temperatura iniziale

SOLUZIONE:

La temperatura dell'aria all'uscita del compressore si ottiene immediatamente dalla relazione dell'adiabatica in coordinate T e p :

$$\frac{T_u}{T_i} = \left(\frac{p_i}{p_u} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \Longrightarrow \quad T_u = T_i \cdot \left(\frac{p_i}{p_u} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

dove $\gamma = c_p/c_v$. Per l'aria, considerata gas perfetto biatomico: $\gamma = (7/2 \cdot R^*)/(5/2 \cdot R^*) = 7/5$

Scrivendo il bilancio di energia per il sistema aperto compressore (in termini di potenza):

$$\dot{M}_i \cdot (w_i^2/2 + g \cdot z_i + u_i + p_i \cdot v_i) + \dot{Q} - \dot{L} = \dot{M}_u \cdot (w_u^2/2 + g \cdot z_u + u_u + p_u \cdot v_u)$$

con le semplificazioni: $\dot{M}_i = \dot{M}_u \quad z_i = z_u \quad w_i = w_u \quad \dot{Q} = 0$

ed introducendo l'entalpia: $h = u + p \cdot v$

si ottiene: $\dot{M} \cdot h_i - \dot{L} = \dot{M} \cdot h_u \quad \implies \quad \dot{L} = -\dot{M} \cdot (h_u - h_i) = -\dot{M} \cdot c_p \cdot (T_u - T_i)$

Dall'equazione di stato (in termini di portate):

$$p \cdot \dot{V} = \dot{M} \cdot R^* \cdot T \quad \implies \quad \dot{M} = \frac{p \cdot \dot{V}}{R^* \cdot T} = \frac{p_i \cdot \dot{V}_i}{R^* \cdot T_i}$$

che sostituita nell'espressione della potenza meccanica necessaria per eseguire la trasformazione:

$$\dot{L} = -\frac{p_i \cdot \dot{V}_i}{R^* \cdot T_i} \cdot c_p \cdot T_i \cdot (T_u/T_i - 1) = -p_i \cdot \dot{V}_i \cdot \frac{c_p}{R^*} \cdot (T_u/T_i - 1)$$

Per una trasformazione adiabatica si ha che:

- $\frac{c_p}{R^*} = \frac{\gamma \cdot c_v}{c_p - c_v} = \frac{\gamma \cdot c_v}{\gamma \cdot c_v - c_v} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$
- $\frac{T_u}{T_i} = \left(\frac{p_i}{p_u}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Per cui la potenza richiesta dal compressore adiabatico risulta:

$$\dot{L} = -p_i \cdot \dot{V}_i \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_i}{p_u}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

Se si suppone di dividere la compressione in due stadi (1 e 2) con uguale rapporto di compressione, definito come rapporto tra la pressione di fine ed inizio compressione, si ottiene che:

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_{tot} \quad \implies \quad \beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\beta_{tot}}$$

Indicando con p_x la pressione a cui termina la prima compressione ed inizia la seconda, si ricava che tale pressione è pari a:

$$\frac{p_x}{p_i} = \frac{p_u}{p_x} = \sqrt{\frac{p_u}{p_i}} \quad \implies \quad p_x = \sqrt{p_i \cdot p_u}$$

Utilizzando la relazione ricavata precedentemente per la potenza meccanica nel caso di compressione adiabatica, la potenza necessaria per eseguire i due stadi di compressione è pari a:

$$\dot{L}_1 = -\dot{M} \cdot c_p \cdot (T_x - T_i) = -p_i \cdot \dot{V}_i \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_i}{p_x}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\dot{L}_2 = -\dot{M} \cdot c_p \cdot (T_u - T_x) = -p_x \cdot \dot{V}_x \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_x}{p_u}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

Con la refrigerazione intermedia fino alla temperatura iniziale, dall'equazione di stato in termini di portate si ottiene che:

- per lo stadio 1: $p_i \cdot \dot{V}_i = \dot{M} \cdot R^* \cdot T_i$
- per lo stadio 2: $p_x \cdot \dot{V}_x = \dot{M} \cdot R^* \cdot T_i$

per cui risulta che: $p_i \cdot \dot{V}_i = p_x \cdot \dot{V}_x$

Considerando inoltre che i rapporti di compressione sono uguali, per cui:

$$\beta_1 = \beta_2 \quad \implies \quad \frac{p_i}{p_x} = \frac{p_x}{p_u}$$

si ricava che la potenza richiesta dai due stadi del compressore è la stessa. La potenza totale richiesta è quindi pari a:

$$\dot{L} = \dot{L}_1 + \dot{L}_2 = 2 \cdot \dot{L}_1 = -2 \cdot p_i \cdot \dot{V}_i \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_i}{p_x} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

RISULTATI NUMERICI:

La temperatura di fine compressione è pari a:

$$T_u = 293.15 \cdot \left(\frac{101325}{12 \cdot 98100 + 101325} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = 604.81 \text{ K}$$

mentre la potenza necessaria ad eseguire la compressione risulta:

$$\dot{L} = -101325 \cdot \frac{1500}{3600} \cdot \frac{1.4}{1.4 - 1} \cdot \left[\left(\frac{101325}{12 \cdot 98100 + 101325} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} - 1 \right] \cong -157 \text{ kW} \quad \text{entrante}$$

Nel caso di compressione in due stadi con uguale rapporto di compressione e refrigerazione intermedia, la pressione a cui finisce la prima compressione ed inizia la seconda è pari a:

$$p_x = \sqrt{101325 \cdot (12 \cdot 98100 + 101325)} = 359869 \text{ Pa}$$

mentre la potenza totale richiesta per eseguire la compressione è pari a:

$$\dot{L} = -2 \cdot 101325 \cdot \frac{1500}{3600} \cdot \frac{1.4}{1.4 - 1} \cdot \left[\left(\frac{101325}{359869} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} - 1 \right] \cong -129 \text{ kW} \quad \text{entrante}$$

OSSERVAZIONI:

Nella soluzione con refrigerazione intermedia la potenza richiesta dal compressore diminuisce di circa 28 kW.

Esercizio 5.8

Argomento: Compressore non isoentropico

Un compressore di gas (He, approssimabile a gas ideale monoatomico, M_M 4 kg/kmol) opera tra le condizioni iniziali $p_i = 3$ bar, $T_i = -50$ °C e la pressione finale $p_u = 12$ bar, secondo un processo adiabatico irreversibile, assorbendo una potenza meccanica $\dot{L}_{ut} = 200$ kW. Conoscendo la portata del

gas $\dot{M} = 0.2 \text{ kg/s}$, calcolare:

- il rendimento isoentropico del compressore η_{IS} ;
- l'entropia totale prodotta per irreversibilità \dot{S}_P .

SOLUZIONE:

Trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale e sapendo che il compressore è adiabatico, la potenza meccanica richiesta può essere calcolata come:

$$\dot{L}_{ut} = \dot{M} (h_u - h_i)$$

e poiché il gas è approssimabile ad ideale:

$$\dot{L}_{ut} = \dot{M} c_P \cdot (T_u - T_i)$$

Dato che la potenza scambiata \dot{L}_{ut} è nota, l'equazione precedente può essere utilizzata per ricavare T_u :

$$T_u = T_i + \frac{\dot{L}_{ut}}{\dot{M} c_P}$$

da cui immediatamente l'entropia totale prodotta per irreversibilità:

$$\Delta s_P = c_P \ln \frac{T_f}{T_i} - R^* \ln \frac{p_f}{p_i}$$

$$\dot{S}_P = \dot{M} \left(c_P \ln \frac{T_f}{T_i} - R^* \ln \frac{p_f}{p_i} \right)$$

Considerando invece un compressore ideale, isoentropico, la temperatura di uscita ideale può essere ricavata o tramite l'equazione

$$T_{u,iso} = T_i \cdot (p_i/p_i)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

o imponendo $\Delta s_P = 0$.

Una volta nota $T_{u,iso}$, si ha immediatamente il rendimento isoentropico:

$$\eta_{isoC} = (h_{u,iso} - h_i)/(h_u - h_i) = (T_{u,iso} - T_i)/(T_u - T_i)$$

RISULTATI NUMERICI:

$MM = 4 \text{ kg/kmol}$
 $R^* = 2078.5 \text{ J/kgK}$
 $c_P = 5196.25 \text{ J/kgK}$
 $\gamma = 1.67$
 $T_u = 415.6 \text{ K}$
 $T_{u,iso} = 388.5 \text{ K}$
 $\Delta s_P = 350 \text{ J/kgK}$
 $\dot{S}_P = 70 \text{ W/K}$
 $\dot{L}_{ut iso} = 171.9 \text{ kW}$
 $\eta_{isoC} = 0.86$

Esercizio 5.9

Argomento: Compressore reale con trasformazione politropica tra gli stessi stati

Un compressore adiabatico reale, con un rendimento isoentropico η_{isC} pari a 0.85, comprime un flusso d'aria a pressione ambiente e temperatura di 300 K fino a 1.8 MPa. Si determini:

- *la temperatura dell'aria all'uscita del compressore;*
- *l'entropia specifica generata per irreversibilita;*
- *l'indice k della trasformazione ideale politropica che porti l'aria dalle stesse condizioni iniziali alle stesse condizioni finali della compressore reale descritta;*
- *il lavoro specifico necessario se il compressore operasse una trasformazione isoterma internamente reversibile.*

SOLUZIONE:

```
%DATI
Pi=1e5;
Ti=300;
Pf=1.8e6;
eta_is=0.85;
%soluzione
R=8314/29;
cp=7/2*R;
gamma=7/5;
Tf_id=Ti*(Pi/Pf)^((1-gamma)/gamma);
l_id=cp*(Tf_id-Ti);
l_r=l_id/eta_is;
%Tf reale
Tf_r=Ti+l_r/cp;
%ds per il caso isoentropico, deve dare 0
ds_i=cp*log(Tf_id/Ti)-R*log(Pf/Pi);
%ds
ds=cp*log(Tf_r/Ti)-R*log(Pf/Pi);
%calcolo dell'indice direttamente da T e P
%n=(log(Tf_r/Ti)/log(Pi/Pf)+1)^-1;
%calcolo dell'indice passando attraverso v
vi=R*Ti/Pi;
vf=R*Tf_r/Pf;
n=log(Pi/Pf)/log(vf/vi);
%l per compressore isoterma int. rev.
%dl = v dp = RT/P dP
l_isoT=R*Ti*log(Pf/Pi);
```

RISULTATI NUMERICI:

P_f	1800000.000000	P_i	100000.000000	R	286.689655	$T_{f_i d}$	685.126147
T_{f_r}	753.089584	T_i	300.000000	c_p	1003.413793	ds	94.904094
ds_i	0.000000	$eta_{i s}$	0.850000	$gamma$	1.400000	$l_i d$	386440.887572
$l_{i s o T}$	248591.904777	l_r	454636.338320	n	1.467216	vf	0.119946
vi	0.860069						

Esercizio 5.10

Argomento: Confronto tra turbina e laminazione

In un ramo di una rete ad alta pressione di distribuzione del metano (gas ideale, molecola CH_4) fluisce una portata $\dot{M} = 300$ kg/s a $P_i = 60$ bar e $T_i = 20$ °C.

Dovendo portare le condizioni del gas a $P_u = 6$ bar, T_u ancora 20 °C, si hanno tre possibilità:

- espansione in una valvola di laminazione isoentalpica;
- espansione in turbina, poi riscaldamento;
- riscaldamento, poi espansione in turbina.

Determinare per i tre casi la potenza termica da fornire perchè la T finale sia quella richiesta.

SOLUZIONE:

Considerando l'espressione del Primo principio per i sistemi fluenti applicata ai modelli usualmente adottati per le turbomacchine e le valvole di laminazione (trascurabili la differenza di quota e di energia cinetica fra ingresso ed uscita, e considerato adiabatico il processo) si ha:

- nella valvola di laminazione $h_u = h_i$
- nella turbina $h_u = h_i + l_{ut}$

Trattandosi di gas ideale, la laminazione non ha alcun impatto sulla temperatura, pertanto per il primo caso la T di uscita coincide con quella di ingresso e non si deve effettuare alcuna operazione di riscaldamento/raffreddamento successiva.

Utilizzando invece una turbina, avendosi un abbattimento entalpico con cessione di lavoro si ha anche un raffreddamento del gas e quindi dovrà effettivamente essere fornita una potenza termica per riportare il gas alla temperatura di ingresso. Supponendo isobaro il processo di riscaldamento si ha per quest'ultimo, sempre dal Primo principio per sistemi fluenti: $q = \Delta h = c_p \Delta T$.

Nel caso 2), riscaldamento dopo l'uscita dalla turbina, si ha quindi ($T_{out T}$ è la T di uscita dalla turbina):

$$\dot{Q} = \dot{M} c_p (T_u - T_{out T})$$

mentre nel caso 3), riscaldamento prima dell'ingresso in turbina, si ha ($T_{in T}$ è la T di ingresso in turbina):

$$\dot{Q} = \dot{M} c_p (T_{in T} - T_i)$$

Essendo noto γ , c_p è determinabile dalla relazione $c_p = \gamma R^* / (\gamma - 1)$.

La T incognita ($T_{in T}$, $T_{out T}$) può essere invece in entrambi i casi calcolata tramite l'equazione della politropica adiabatica:

- nel caso 2) $T_{out T} = T_i (P_i/P_u)^{(1-\gamma)/\gamma}$

- nel caso 3) $T_{inT} = T_u (P_u/P_i)^{(1-\gamma)/\gamma}$

RISULTATI NUMERICI:

$$MM = 16 \text{ kg/kmol}$$

$$R^* = 8314 / 16 = 519.6 \text{ J/kgK}$$

$$c_P = 4/3 \cdot 519.6 / (4/3 - 1) = 2078.5 \text{ J/kgK}$$

- caso 1: $\dot{Q} = 0$;
- caso 2): $T_{outT} = 164.8 \text{ K}$, $\dot{Q} = 80 \text{ MW}$
- caso 3): $T_{inT} = 521.3 \text{ K}$, $\dot{Q} = 142.2 \text{ MW}$

OSSERVAZIONI:

- Si osserva che sia nel caso 2) che nel caso 3) il calore necessario per riscaldare il gas coincide numericamente con il lavoro utile della turbina ($\dot{L} = \dot{M}\Delta h = \dot{M} c_P \Delta T$ nell'approssimazione di gas ideale) per cui dal punto di vista del bilancio energetico del solo processo in gioco non si configura alcun vantaggio utilizzando la turbina. Tuttavia si deve considerare che per fornire una potenza meccanica/elettrica ad esempio di 80 MW (caso 2) le centrali termoelettriche attualmente disponibili richiederebbero una potenza termica in ingresso di oltre 180 MW, pertanto in un contesto energetico allargato l'adozione della turbina appare senz'altro attraente (malgrado il superiore costo della macchina) ed è tipicamente utilizzata.
- a $T = 172.62 \text{ K}$, $P = 6 \text{ bar}$ potrebbe venire il dubbio di essere sotto la curva limite: un controllo sulle tabelle / diagrammi del metano conferma però che anche in tali condizioni il metano è in fase vapore ($P_{sat}(164.8 \text{ K}) = 1.92 \text{ MPa}$). Entrambe quindi le strade 2) e 3) sono percorribili: nelle centrali reali viene solitamente utilizzata la 3) in quanto, pur comportando di dover fornire energia termica ad alta temperatura (per scaldare da 293 a 521 K invece che da 164 a 293 K), permette alla turbina di offrire poi molto più lavoro (e v. osservazione 1).

LISTATO MATLAB PER LA SOLUZIONE:

```

Pi=60e5;
Ti=20+273.15;
Pu=6e5;
Tu=20+273.15;
g=4/3;
MM=16;

M=300;

ToutT=Ti*(Pi/Pu)^((1-g)/g);
TinT=Tu*(Pu/Pi)^((1-g)/g);

Rs=8314/MM;
cp=4*Rs;
Q2=M*cp*(Tu-ToutT);
Q3=M*cp*(TinT-Tu);

```

Esercizio 5.11

Argomento: *Turbina non adiabatica*

Una turbina a gas, non ben isolata, espande una portata di aria secca da $T_1 = 650 \text{ }^\circ\text{C}$, $P_1 = 30 \text{ bar}$ a $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, cedendo una potenza termica $\dot{Q} = 500 \text{ kW}$ all'ambiente esterno a T_E (costante) = $25 \text{ }^\circ\text{C}$. Sapendo che la portata massica in ingresso alla turbina è $\dot{M} = 25 \text{ kg/s}$, calcolare la potenza meccanica fornita dalla turbina, la pressione di uscita e la variazione entropica totale del processo per unità di tempo.

SOLUZIONE:

%DATI

Pi=30e5;

Ti=650+273.15;

Tu=100+273.15;

Mp=25;

Qp=-5e5; %punto di vista del gas

Te=25+273.15;

%SOLUZIONE

R=8314/29;

cV=5/2*R;

cP=7/2*R;

%Qp=Mp*cx*(Tu-Ti);

cx=Qp/(Mp*(Tu-Ti));

k=(cx-cP)/(cx-cV);

Pu=Pi*(Ti/Tu)^(k/(1-k));

l_noQ=cP*(Tu-Ti);

l=(cP-cx)*(Tu-Ti);

L=Mp*l;

DSgas=Mp*cx*log(Tu/Ti);

DSae=-Qp/Te;

DStot=DSgas+DSae;

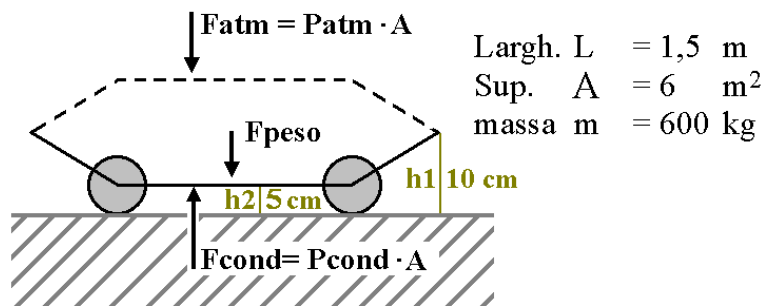
RISULTATI NUMERICI:

Esercizio 5.12

Argomento: *Formula 1 con le "minigonne"*

DS_{ae}	1677.008217	DS_{gas}	-823.464774	$DStot$	853.543443	L	-13296939.655172
Mp	25.000000	Pi	3000000.000000	Pu	141305.051066	Qp	-500000.000000
R	286.689655	Te	298.150000	Ti	923.150000	Tu	373.150000
cP	1003.413793	cV	716.724138	cx	36.363636	k	1.421379
l	-531877.586207	l_{noQ}	-551877.586207				

Una vettura di “Formula 1” con le “minigonne” sfrutta la deportanza indotta grazie al condotto che si crea tra vettura e terreno per aumentare la propria aderenza alla strada. La “Formula 1” può essere [rozzamente] schematizzata come in figura. Si calcoli la forza totale che preme la vettura a terra durante una curva con raggio $R = 200$ m percorsa a $w = 180$ km/h. La vettura rimane in strada o finisce fuori pista?



SOLUZIONE:

La forza totale che preme a terra la vettura è pari al ΔP tra sopra e sotto la vettura, moltiplicato per la superficie orizzontale A della vettura stessa. Nota la superficie, bisogna dunque calcolare il ΔP .

La superficie inferiore del corpo vettura, il terreno e le minigonne creano un condotto, in cui è come se l'aria scorresse con velocità che ha la stessa direzione di quella della macchina, verso opposto e modulo dipendente dalla sezione.

In A_1 alla velocità della vettura, in A_2 più velocemente dato che la sezione è inferiore e l'aria è approssimabile a incomprimibile ($w_1 = 180$ km/h = 50 m/s < 1/3 c). Dall'equazione di continuità si ha:

$$w_2 = w_1 h_1 / h_2 = 360 \text{ km/h} = 100 \text{ m/s}$$

Non essendoci scambi di lavoro ed essendo trascurabili gli scambi di calore e le variazioni di energia potenziale [$gz = 9.806 \cdot (0.05 - 0.025) = 0.245$ J/kg, contro ad es. $P_1 v_1 = 86974$ J/kg], dal Primo Principio per i sistemi fluenti si ha (la portata è costante tra ingresso e uscita se si trascurano le dispersioni laterali tra minigonne e gomme):

$$u_1 + P_1 v + w_1^2 / 2 = u_2 + P_2 v + w_2^2 / 2$$

Dato che l'aria può essere approssimata a gas perfetto, $u = f(T)$ e quindi potendosi ritenere T praticamente costante (attenzione: non rigorosamente costante, perchè altrimenti fissando sia v sia T anche P sarebbe fissata - il sistema è monocomponente monofase quindi ha 2 g.d.l., se li si blocca entrambi nessuna trasformazione è possibile - in contrasto con quello che avviene e che si vuole valutare), $u_1 = u_2$ per cui:

$$P_2 - P_1 = (w_1^2 - w_2^2) / (2v)$$

Ipotizzando $P_{atm} = 101325$ Pa, T_{atm} (vicino al suolo) = 30 °C, si ha $v = 0.858$ m³/kg e $P_2 - P_1 = -4371$ Pa

Una variazione di pressione piccola rispetto al valore assoluto di P , per cui l'ipotesi di incomprimibilità è ragionevole.

$P_2 - P_1$ è la differenza netta di pressione tra sotto e sopra la macchina, e moltiplicata per la superficie della macchina stessa dà come già detto la forza di schiacciamento.

Approssimando la superficie della macchina (tra l'altro confondendo la superficie del condotto con la superficie complessiva della macchina) ad $A = 6$ m² si ottiene una forza risultante in modulo pari a $F_{ris} = 26224$ N, contro un peso proprio del veicolo pari a $Mg = 5886$ N.

Grazie alla deportanza indotta dal condotto che si crea usando le minigonne, la macchina durante la curva rimane in strada. Il solo peso - anche nell'ipotesi peraltro abbastanza vicina alla realtà di coefficiente di attrito unitario - non basterebbe invece a tenere la macchina attaccata alla strada:

$$F_{tot} = 5886 + 26224 = 32109 \text{ N}$$

$$F_{centrifuga} = M\omega^2 R = Mw^2/R = 7500 \text{ N}$$

OSSERVAZIONI:

E' lo stesso principio sfruttato dagli aeroplani per decollare/sostenersi in volo (ovviamente al contrario) e dalle barche a vela per avanzare.

I valori nei risultati di questo esercizio non hanno pretese di realismo, in una vettura reale intervengono ovviamente moltissimi altri aspetti qui non considerati.

Esercizio 5.13

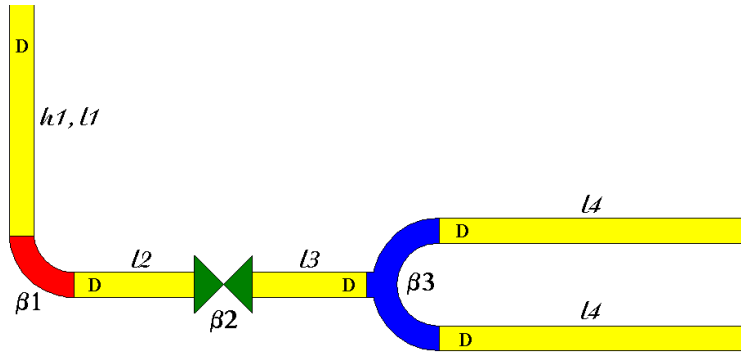
Argomento: Perdite di carico

Nel condotto rappresentato in figura scorre una portata massica d'acqua $\dot{M} = 10$ kg/s (a $T = 20$ °C e $P_{ingresso} = 1$ bar, $\mu_{H_2O} = 0.001$ Ns/m²). Determinare la perdita di carico totale lungo il condotto sapendo che:

- $h_1 = l_1 = 10$ m; $l_2 = 5$ m; $l_3 = 4$ m; $l_4 = 19$ m;
- $D = 0.1$ m;
- $b_1 = 0.35$, $b_2 = 0.4$, $b_3 = 2.0$;
- ε/D dei condotti = 0.001;

SOLUZIONE:

Le perdite di carico complessive sono pari alla somma di quelle distribuite e di quelle concentrate. A loro volta le perdite di carico distribuite sono da calcolare utilizzando velocità diverse per i tratti 1, 2 e 3 (stessa velocità) e per il tratto 4: alla biforcazione infatti il flusso trova davanti a sé due condotti uguali ciascuno di sezione pari a quella del condotto di partenza, al termine dei quali c'è la stessa pressione, per cui si divide in due parti uguali e, potendosi considerare la densità costante, la velocità risulta dimezzata.



$$w_{1,2,3} = \dot{M} / (\rho \pi D^2 / 4) = 1.273 \text{ m/s}$$

$$w_4 = 0.636 \text{ m/s}$$

Per quanto riguarda dunque le perdite di carico distribuite ΔP_L :

$$Re_{1,2,3} = \rho w_{1,2,3} D / \mu = 127324; Re_4 = \rho w_4 D / \mu = 63662.$$

A livello di rugosità relativa invece i condotti possono essere considerati tutti uguali (uguale diametro, uguale materiale e tecnica realizzativa). Per cui dall'abaco di Moody entrando con la stessa rugosità relativa e differenti Re :

$$f_{1,2,3} = 0.0225; f_4 = 0.024;$$

$$\Delta P_L = f_{1,2,3} / D \rho w_{1,2,3}^2 / 2 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + f_4 / D \rho w_4^2 / 2 \cdot l_4 = (3465 + 924) = 4389 \text{ Pa.}$$

Le perdite di carico concentrate risultano invece (nell'ipotesi di aver scelto per la biforcazione un coefficiente che si riferisca al termine cinetico a monte della singolarità, per tutte il coefficiente di perdita di carico moltiplica lo stesso termine cinetico per unità di volume):

$$\Delta P_C = (b_1 + b_2 + b_3) \cdot \rho w_{1,2,3}^2 / 2 = 2229 \text{ Pa.}$$

La perdita di carico totale risulta quindi: $\Delta P_{tot} = \Delta P_L + \Delta P_C = 6618 \text{ Pa.}$

Esercizio 5.14 (esercizio di approfondimento)

Argomento: *Contorni reali e virtuali: riempimento di un recipiente vuoto*

Un recipiente vuoto provvisto di un rubinetto è posto su un tavolo, circondato da aria a pressione p_a e temperatura T_a atmosferiche. Se il rubinetto viene aperto e l'aria entra nel recipiente finché il processo non si ferma spontaneamente, qual è la temperatura T_f dell'aria all'interno del recipiente alla fine del processo di riempimento? È un processo reversibile, e in caso negativo quale è il ΔS ?

SOLUZIONE:

Il processo si fermerà quando la pressione dell'aria nel recipiente sarà diventata pari alla pressione atmosferica: $P = P_a$.

Considerando il recipiente vuoto come un sistema fluente con un ingresso e nessuna uscita, in condizioni di transitorio.

Il contorno del sistema è rappresentato dalle pareti del recipiente, approssimabili a perfettamente rigide (e adiabatiche data la velocità del processo).

Le condizioni dell'aria in ingresso sono quelle atmosferiche.

I bilanci di massa ed energetici possono quindi essere scritti come (trascurando il contributo cinetico in ingresso, che in verità può anche essere significativo):

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} = \dot{M}_{in}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \dot{M}_{in} h_{in}$$

A questo punto, sostituendo la prima nella seconda e considerando che:

- nell'approssimazione che il riempimento non cambi le condizioni esterne, h_{in} è una costante;
- la massa e l'energia interna iniziali nel recipiente sono nulle dato che lo stesso è inizialmente vuoto;

si ottiene:

$$\Delta U = \Delta M h_{in} \quad \Rightarrow \quad U_f = M_f h_{in} \quad \Rightarrow \quad u_f = h_{in}$$

Fissando a 0 l'entalpia h_0 dello stato di riferimento a T_0 :

$$h_{in} = c_p (T_{in} - T_0)$$

$$u_f = u_0 + c_v (T_f - T_0) = h_0 - P_0 v_0 + c_v (T_f - T_0) = -R^* T_0 + c_v (T_f - T_0)$$

Si noti che se si fissa in un certo stato di riferimento $h_0 = 0$, s_0 può essere anch'essa scelta nulla nello stesso stato di riferimento, ma u_0 no, perchè sarebbe incoerente con $h = u + Pv$.

Quindi sostituendo nel bilancio energetico:

$$-R^* T_0 + c_v (T_f - T_0) = c_p (T_{in} - T_0)$$

da cui immediatamente:

$$T_f = c_p / c_v T_{in} \quad (= c_p / c_v T_a)$$

Il processo è spontaneo e avviene sotto una differenza finita di potenziale di interazione meccanica; pertanto, anche trascurando gli attriti, esso non è reversibile.

Per quanto riguarda la variazione entropica, il bilancio entropico sul sistema può essere scritto come (sistema con un ingresso, nessuna uscita, trascurando l'effetto degli attriti ma includendo il fatto che la trasformazione avviene a causa di un ΔP finito e quindi ha una esterna irreversibilità):

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \dot{M}_{in} s_{in} + \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)_{\Delta P}$$

Quindi seguendo la stessa logica di ragionamento utilizzata per il calcolo energetico:

$$\Delta S = \Delta M s_{in} + \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)_{\Delta P} \Delta \tau$$

dunque:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_{\Delta P} \Delta \tau = M_f (s_f - s_{in}) = M_f c_p \ln \frac{T_f}{T_{in}}$$

(il contributo della pressione non compare nel Δs perchè la pressione esterna e la pressione dell'aria nella scatoletta a fine riempimento sono uguali).

* * *

Il problema può anche essere risolto considerando un sistema chiuso, inizialmente in disequilibrio, contenuto in un contorno in parte reale - le pareti del recipiente - ed in parte virtuale: una superficie che delimita tutta l'aria esterna che entrerà nel recipiente.

Quando la pressione dell'aria nel recipiente sarà diventata pari alla pressione atmosferica, nel recipiente sarà entrata una massa d'aria M che all'esterno, a p_a e T_a , occupava un volume V_a ; mentre a fine processo il suo volume sarà ovviamente pari al volume interno V_s del recipiente stesso. Ipotizzando che il recipiente, il rubinetto ed il contorno ideale che racchiude l'aria che entrerà nel recipiente (il tutto risulta un sistema chiuso) siano contorni adiabatici:

$$Q = 0 \implies 0 + L = \Delta U \implies L = \Delta U$$

Il lavoro si può esprimere come: $L = -P \cdot \Delta V = -P_a \cdot [V_s - (V_a + V_s)] = P_a \cdot V_a = M \cdot P_a \cdot v_a = M \cdot R^* \cdot T_a$

mentre la variazione di energia interna: $\Delta U = M \cdot c_V \cdot (T_f - T_a)$

Quindi risulta: $M \cdot R^* \cdot T_a = M \cdot c_V \cdot (T_f - T_a)$

Da cui si ricava la temperatura dell'aria alla fine del processo:

$$(R^* + c_V) \cdot T_a = c_V \cdot T_f \implies T_f = c_P / c_V \cdot T_a = \gamma \cdot T_a$$

Note la temperatura e pressione finali è possibile calcolare la densità finale e quindi se fosse noto il volume V_s della scatola sarebbe possibile determinare la massa d'aria entrata, da cui il volume V_a iniziale, che è in ogni caso minore di V_s (la pressione non varia, $T_f > T_a \implies \rho_f < \rho_a$).

La variazione di entropia può essere in questo caso calcolata considerando fittiziamente che una massa di aria M_f passi da condizioni (T_a, P_a) a condizioni (T_f, P_a) , e quindi:

$$\Delta S = M_f c_p \ln \frac{T_f}{T_a}$$

o anche volendo considerare i volumi:

$$\Delta S = M_f c_V \ln \frac{T_f}{T_a} + R^* \ln \frac{V_f}{V_a} = M_f c_p \ln \frac{T_f}{T_a}$$

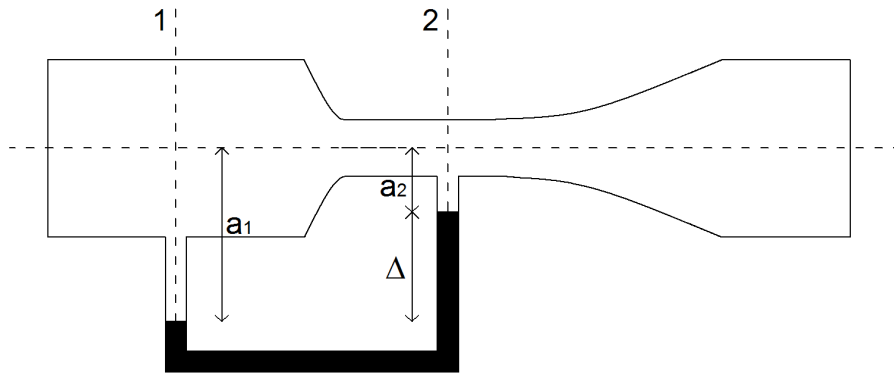
dato che le pressioni iniziale e finale sono uguali, il rapporto tra i volumi coincide con il rapporto tra le temperature.

Esercizio 5.15 (esercizio di approfondimento)

Argomento: Venturimetro

Determinare la portata di un fluido incompressibile con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, conoscendo l'indicazione manometrica del venturimetro rappresentato in figura.

Sono noti $D_1 = 0.2 \text{ m}$, $D_2 = 0.07 \text{ m}$, $a_1 = 0.15 \text{ m}$, $a_2 = 0.05 \text{ m}$, $\Delta = 0.1 \text{ m}$ e la densità del fluido manometrico $\rho_m = 13548 \text{ kg/m}^3$.



SOLUZIONE:

Scrivendo il bilancio di energia per il sistema aperto venturimetro tra le sezioni 1 e 2 (in termini di potenza):

$$\dot{M}_1 \cdot (w_1^2/2 + g \cdot z_1 + u_1 + p_1 \cdot v_1) + \dot{Q} + \dot{L} = \dot{M}_2 \cdot (w_2^2/2 + g \cdot z_2 + u_2 + p_2 \cdot v_2)$$

ma essendo:

- il fluido incompressibile: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$
- la massa in ingresso uguale a quella in uscita: $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$
- il deflusso adiabatico ed il fluido ideale: $\dot{Q} = 0$ e $u_1 = u_2$
- lo scambio di potenza meccanica nullo: $\dot{L} = 0$
- la variazione di altezza nulla: $g \cdot z_1 = g \cdot z_2 = 0$

il bilancio si riduce alla seguente relazione:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot w_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot w_2^2$$

in cui le pressioni e le velocità all'ingresso e all'uscita sono incognite.

Dall'equazione di conservazione della massa, dato che il fluido è incompressibile ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), si ricava che:

$$\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2 \quad \implies \quad w_1 = w_2 \cdot A_2/A_1$$

mentre impostando l'equazione di equilibrio del manometro, si ottiene che:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot a_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot a_2 + \rho_m \cdot g \cdot \Delta \quad \implies \quad p_1 - p_2 = \rho \cdot g(a_2 - a_1) + \rho_m \cdot g \cdot \Delta$$

Riscrivendo il bilancio di energia nella seguente forma:

$$w_2^2 - w_1^2 = 2/\rho \cdot (p_1 - p_2)$$

e sostituendo le relazioni appena ricavate per w_1 e $(p_1 - p_2)$:

$$w_2^2 - w_2^2 \cdot A_2^2/A_1^2 = 2/\rho \cdot (\rho \cdot g(a_2 - a_1) + \rho_m \cdot g \cdot \Delta)$$

in cui l'unica incognita è w_2 , che è quindi pari a:

$$w_2^2 \cdot \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) = -2 \cdot g \cdot \Delta + 2 \cdot \frac{\rho_m}{\rho} \cdot g \cdot \Delta \quad \Rightarrow \quad w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta \cdot \frac{\rho_m - \rho}{\rho}}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Nota la velocità del fluido in una delle sezioni, la portata di fluido risulta dunque: $\dot{M} = \rho \cdot w_2 \cdot A_2$

RISULTATI NUMERICI:

La velocità del fluido che attraversa il venturimetro nella sezione 2 è pari a:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.1 \cdot \frac{13548 - 1000}{1000}}{1 - \left(\frac{3.14 \cdot 0.07^2/4}{3.14 \cdot 0.2^2/4}\right)^2}} \cong 5 \text{ m/s}$$

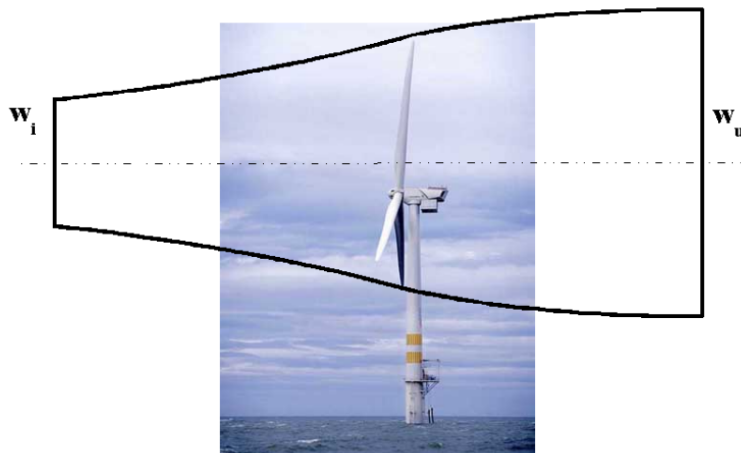
e la portata di fluido che attraversa il venturimetro risulta quindi:

$$\dot{M} = 1000 \cdot 5 \cdot (3.14 \cdot 0.07^2/4) = 19.25 \text{ kg/s}$$

Esercizio 5.16 (esercizio di approfondimento)

Argomento: Aerogeneratore

Determinare che potenza può fornire un aerogeneratore ad asse orizzontale avente rotore di diametro $D = 104 \text{ m}$ investito da vento a 14 m/s ($T = 20 \text{ C}$, $p = 101325 \text{ Pa}$, vento \perp al rotore), nell'ipotesi di rotore ideale (∞ pale, $c_p = 1 \text{ kJ/kgK} \forall w_{vento}$) progettato per avere la massima efficienza.



SOLUZIONE:

Ipotizzando di poter definire un tubo di flusso che non abbia interazioni con la corrente fluida ad esso esterna, è possibile applicare il primo principio per sistemi aperti e l'equazione di continuità al sistema (con contorno quindi ideale) tubo di flusso + rotore/generatore:

$$\dot{M}_i = \dot{M}_u \quad \Longrightarrow \quad A_i \cdot \rho_i \cdot w_i = A_u \cdot \rho_u \cdot w_u$$

$$\dot{M}_i \cdot (w_i^2/2 + g \cdot z_i + u_i + p_i \cdot v_i) + \dot{Q} + \dot{L}_{ut} = \dot{M}_u \cdot (w_u^2/2 + g \cdot z_u + u_u + p_u \cdot v_u)$$

Essendo:

- il tubo di flusso ad asse orizzontale come il rotore
- la pressione molto a monte e molto a valle dell'aerogeneratore quella atmosferica
- con contorno perfettamente diabatico e senza trasferimenti di massa se non attraverso le sezioni di ingresso e uscita (ipotesi di isothermicità e non interazione con la corrente fluida esterna)

ed approssimando l'aria a incomprimibile (ipotesi valida per velocità \ll di quella del suono):

$$\dot{M} \cdot w_i^2/2 + \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot w_u^2/2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{L}_{ut} = \dot{M} \cdot (w_u^2 - w_i^2)/2$$

Dal punto di vista del rotore: $\dot{L}_{rot} = -\dot{L}_{ut}$

Inoltre vale l'equazione di continuità: $A_i \cdot \rho_i \cdot w_i = A_u \cdot \rho_u \cdot w_u$

nonché l'equazione di conservazione della quantità di moto (in cui F è la forza che agisce sul rotore):

$$F = \dot{M} \cdot (w_i - w_u)$$

per cui la potenza che il vento comunica al rotore può anche essere espressa come (in cui w è la velocità del vento al rotore):

$$\dot{L}_{rot} = \dot{M} \cdot (w_i - w_u) \cdot w$$

Eguagliando le due espressioni ottenute per la potenza \dot{L}_{rot} :

$$\dot{M} \cdot (w_i - w_u) \cdot w = \dot{M} \cdot (w_i^2 - w_u^2)/2 \quad \Longrightarrow \quad w = (w_i + w_u)/2$$

quindi il rallentamento della corrente fluida avviene per metà a monte e per metà a valle dell'aerogeneratore.

Questo risultato, unito all'equazione di continuità, ci permette di esprimere la potenza sottratta dall'aerogeneratore alla corrente fluida esplicitando la massa:

$$\dot{L}_{rot} = \dot{M} \cdot (w_i^2 - w_u^2)/2 = A \cdot \rho \cdot w \cdot (w_i^2 - w_u^2)/2 = A \cdot \rho \cdot (w_i + w_u) \cdot (w_i^2 - w_u^2)/4$$

La potenza invece disponibile in una corrente fluida di sezione A (e avente densità ρ e velocità w_i) in assenza dell'aerogeneratore è (energia cinetica per unità di tempo):

$$\dot{L}_{vento} = 1/2 \cdot \dot{M} \cdot w_i^2 = 1/2 \cdot A \cdot \rho w_i \cdot w_i^2 = 1/2 \cdot A \cdot \rho \cdot w_i^3$$

rapportando \dot{L}_{rot} a \dot{L}_{vento} e rielaborando l'equazione, otteniamo una funzione del rapporto w_u/w_i :

$$\dot{L}_{rot}/\dot{L}_{vento} = 1/2 \cdot [1 - (w_u/w_i)^2] \cdot (1 + w_u/w_i)$$

Derivando questa espressione si evidenzia che essa ha un massimo per $w_u/w_i = 1/3$ e che in corrispondenza di questo valore la potenza fornita dall'aerogeneratore corrisponde a $16/27$ (valore noto come efficienza di Betz, dal nome dello studioso che per primo lo ha ricavato) della potenza disponibile nella corrente fluida.

RISULTATI NUMERICI:

Per l'aerogeneratore in questione:

$$\dot{L}_{rot,max} = 16/27 \cdot 1/2 \cdot A \cdot \rho \cdot w_i^3 = 0.592 \cdot 0.5 \cdot 8495 \cdot 1.204 \cdot 2744 = 8.32 \text{ MW}$$

OSSERVAZIONI:

Un aerogeneratore orizzontale tripala reale, con pari diametro del rotore, a pari velocità del vento, fornisce 3.6 MW di potenza (situazione non ideale, tre pale, efficienza non massima, $c_p \neq 1$, rendimenti non unitari dei componenti meccanici ed elettrici, ecc.).

Trasformazioni politropiche e non

Esercizio 6.1

Argomento: *Trasformazione politropica*

Una massa $M = 7 \text{ kg}$ di azoto N_2 viene compressa dalle condizioni iniziali $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_i = 5 \text{ bar}$, fino alle condizioni finali $T_f = 35 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_f = 30 \text{ bar}$ mediante una trasformazione politropica. Calcolare n , c_x , ΔU , Q , L , ΔH e ΔS .

SOLUZIONE:

Dall'equazione di stato dei gas ideali si ottengono il volume iniziale e finale di azoto, rispettivamente pari a:

$$V_i = \frac{M \cdot R^* \cdot T_i}{p_i} \quad \text{e} \quad V_f = \frac{M \cdot R^* \cdot T_f}{p_f}$$

Dall'equazione caratteristica della politropica ($p \cdot V^n = \text{cost}$) tra stato iniziale e finale si ricava l'indice della trasformazione:

$$p_i \cdot V_i^n = p_f \cdot V_f^n \quad \implies \quad n = \frac{\ln(p_i/p_f)}{\ln(V_f/V_i)}$$

Lo stesso risultato sarebbe stato anche ottenibile direttamente dai dati di T e p , tramite la riscrittura dell'equazione delle politropiche in tale sistema di coordinate:

$$Tp^{(1-n)/n} = \text{cost}$$

Per l'azoto, considerato gas ideale biatomico, il calore specifico a volume e pressione costante è rispettivamente pari a:

$$c_v = 5/2 \cdot R^* = 5/2 \cdot R/M_{M_{N_2}} \quad \text{e} \quad c_p = 7/2 \cdot R^* = 7/2 \cdot R/M_{M_{N_2}}$$

Dalla definizione dell'indice della politropica si calcola immediatamente il c_x della trasformazione:

$$n = \frac{c_x - c_p}{c_x - c_v} \quad \implies \quad c_x = \frac{n \cdot c_v - c_p}{n - 1}$$

La variazione di energia interna è pari a: $\Delta U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$

il calore scambiato risulta: $Q = M \cdot c_x \cdot \Delta T$

mentre la variazione di entalpia è: $\Delta H = M \cdot c_p \cdot \Delta T$

Dal primo principio per sistemi chiusi si ricava il lavoro scambiato:

$$\Delta U = L + Q \quad \Longrightarrow \quad L = \Delta U - Q$$

Utilizzando la relazione che esprime la variazione di entropia specifica per un gas ideale in coordinate T e p , la variazione di entropia del sistema risulta:

$$\Delta S = M \cdot \Delta s = M \cdot \left(c_p \cdot \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - R^* \cdot \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right) \right)$$

RISULTATI NUMERICI:

Il volume iniziale e finale di azoto è rispettivamente pari a:

$$V_i = \frac{7 \cdot (8314/28) \cdot 293.15}{5 \cdot 10^5} = 1.219 \text{ m}^3 \quad \text{e} \quad V_f = \frac{7 \cdot (8314/28) \cdot 308.15}{30 \cdot 10^5} = 0.213 \text{ m}^3$$

da cui l'indice della politropica risulta:

$$n = \frac{\ln(5/30)}{\ln(0.213/1.219)} = 1.027$$

Il calore specifico dell'azoto a volume e pressione costante è rispettivamente pari a:

$$c_v = 5/2 \cdot 8314/28 = 742 \text{ J/kgK} \quad \text{e} \quad c_p = 7/2 \cdot 8314/28 = 1039 \text{ J/kgK}$$

per cui il c_x della trasformazione risulta:

$$c_x = \frac{1.027 \cdot 742 - 1039}{1.027 - 1} = -10256 \text{ J/kgK}$$

La variazione di energia interna, il calore scambiato e la variazione di entalpia sono rispettivamente pari a:

$$\Delta U = 7 \cdot 742 \cdot (35 - 20) = 77.9 \text{ kJ}$$

$$Q = 7 \cdot (-10256) \cdot (35 - 20) = -1080 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = 7 \cdot 1039 \cdot (35 - 20) = 109.1 \text{ kJ}$$

Il lavoro scambiato risulta: $L = 77 - (-1080) = 1157.9 \text{ kJ}$

mentre la variazione di entropia è pari a:

$$\Delta S = 7 \cdot \left(1039 \cdot \ln \left(\frac{308.15}{293.15} \right) - 8314/28 \cdot \ln \left(\frac{30}{5} \right) \right) = -3361 \text{ J/K}$$

OSSERVAZIONI:

L'entropia è diminuita: la riduzione dello spazio a disposizione dei costituenti microscopici (e quindi delle loro possibilità di disporsi) è solo parzialmente compensata dall'aumento dell'energia degli stessi.

Esercizio 6.2

Argomento: Riscaldamento isobaro

Una massa $M = 0.1 \text{ kg}$ di azoto N_2 viene riscaldata isobaramente da $10 \text{ }^\circ\text{C}$ a $50 \text{ }^\circ\text{C}$.
Calcolare L , Q , ΔU , ΔH e ΔS .

SOLUZIONE:

Per l'azoto, considerato gas perfetto biatomico, il calore specifico a volume e pressione costante è rispettivamente pari a:

$$c_v = 5/2 \cdot R^* = 5/2 \cdot R/M_{M_{N_2}} \quad \text{e} \quad c_p = 7/2 \cdot R^* = 7/2 \cdot R/M_{M_{N_2}}$$

Il calore scambiato durante la trasformazione è pari a: $Q = M \cdot c_p \cdot \Delta T$

mentre la variazione di energia interna risulta: $\Delta U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$

Dal primo principio per sistemi chiusi, considerando che l'unica forma di lavoro che il sistema può scambiare è quella dovuta alla variazione di volume, si ottiene che:

$$\Delta U = Q + L = Q - p \cdot \Delta V$$

L'entalpia è definita come: $H = U + p \cdot V$, che differenziata diventa: $dH = dU + p \cdot dV + V \cdot dp$

La trasformazione è a pressione costante: $dp = 0 \quad \implies \quad dU = dH - p \cdot dV$

che integrata tra stato iniziale e finale diventa: $\Delta U = \Delta H - p \cdot \Delta V$

Uguagliando le due espressioni ricavate per ΔU , si ottiene che per la trasformazione a pressione costante la variazione di entalpia è uguale al calore scambiato:

$$\Delta H - p \cdot \Delta V = Q - p \cdot \Delta V \quad \implies \quad \Delta H = Q$$

Utilizzando la relazione che esprime la variazione di entropia specifica per un gas ideale in coordinate T e p , la variazione di entropia del sistema a seguito della trasformazione a pressione costante risulta:

$$\Delta S = M \cdot \Delta s = M \cdot \left(c_p \cdot \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - R^* \cdot \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right) \right) = M \cdot c_p \cdot \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

Il lavoro può essere calcolato come $\Delta U - Q$, con i ΔU e Q già calcolati, o come $L = -MR^* \Delta T$ in quanto per una trasformazione isobara $\delta l = du - \delta q = c_V dT - c_P dT$.

RISULTATI NUMERICI:

Il calore specifico dell'azoto a volume e pressione costante è rispettivamente pari a:

$$c_v = 5/2 \cdot 8314/28 = 742 \text{ J/kgK} \quad \text{e} \quad c_p = 7/2 \cdot 8314/28 = 1039 \text{ J/kgK}$$

Il calore scambiato durante la trasformazione, che è uguale alla variazione di entalpia, risulta:

$$Q = \Delta H = 0.1 \cdot 1039 \cdot (50 - 10) = 4157 \text{ J}$$

mentre la variazione di energia interna è pari a: $\Delta U = 0.1 \cdot 742 \cdot (50 - 10) = 2969 \text{ J}$

Dal primo principio per sistemi chiusi si ottiene il lavoro scambiato durante la trasformazione:

$$L = -4157 + 2969 = -1187 \text{ J} \quad \text{negativo uscente}$$

La variazione di entropia a seguito della trasformazione è pari a:

$$\Delta S = 0.1 \cdot 1039 \cdot \ln\left(\frac{323.15}{283.15}\right) = 13.73 \text{ J/K}$$

Esercizio 6.3

Argomento: Trasformazione isoterma

Determinare il calore scambiato e il volume specifico finale di una massa $M = 3 \text{ kg}$ di un gas ideale (H_2) che esegue una trasformazione politropica isoterma a $T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ tra la pressione iniziale $p_i = 3 \text{ bar}$ e la pressione finale $p_f = 9 \text{ bar}$.

SOLUZIONE:

Si tratta ovviamente di una compressione per la quale, essendo isoterma e di un gas ideale, risulta $\Delta U = 0$. Trascurando variazioni di energia cinetica e potenziale, dal primo principio, essendo il lavoro entrante, si ha $L = -Q$, cioè:

$$Q = M \cdot \int p \cdot dv = M \cdot R^* \cdot T \cdot \ln(v_f/v_i) = M \cdot R^* \cdot T \cdot \ln(p_i/p_f)$$

Per un'isoterma con gas ideale si ha: $p_i \cdot v_i = p_f \cdot v_f \implies v_f = v_i \cdot (p_i/p_f)$

e per l'equazione di stato: $v_i = R^* \cdot T/p_i$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$p_i = 3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_f = 9 \text{ bar} = 9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = 80 \text{ }^\circ\text{C} = 80 + 273.15 = 353.15 \text{ K}$$

Dall'equazione di stato risulta: $v_i = (8314/2) \cdot 353.15/(3 \cdot 10^5) = 4.89 \text{ m}^3/\text{kg}$

mentre dall'isoterma di gas ideale: $v_f = 4.89 \cdot 3/9 = 1.63 \text{ m}^3/\text{kg}$

Il calore scambiato nella trasformazione è: $Q = 3 \cdot (8314/2) \cdot 353.15 \cdot \ln(1.63/4.89) = -4838.4 \text{ kJ}$

OSSERVAZIONI:

Il segno negativo è coerente col fatto che il calore è uscente dal sistema.

Si nota il valore molto elevato dell'energetica associata al sistema, caratteristica questa tipica dei sistemi costituiti, a pari massa, da aeriformi; inoltre si vede la forte incidenza della massa molare che gioca in modo inversamente proporzionale. Ovvero, una volta fissati la temperatura della compressione/espansione e il rapporto di compressione/espansione, il lavoro e quindi il calore variano, per una isoterma di gas ideale, in modo inversamente proporzionale alla massa molare del gas ideale indipendentemente dalla sua struttura molecolare.

Esercizio 6.4

Argomento: *Trasformazione politropica con c_x noto*

Una massa $M = 0.5$ kg di gas ideale si riscalda seguendo una trasformazione politropica avente calore specifico $c_x = (c_p + c_v)/2$. Le condizioni iniziali sono $p_1 = 2$ bar e $T_1 = 150$ °C, mentre le condizioni finali sono $T_2 = 200$ °C. Calcolare la variazione di energia interna e di entalpia, il calore e il lavoro scambiati lungo la trasformazione nei casi in cui il gas ideale sia He ($M_M = 4$ kg/kmol), O₂ ($M_M = 32$ kg/kmol), vapore di zolfo ($M_M = 32$ kg/kmol) e N₂ ($M_M = 28$ kg/kmol).

SOLUZIONE:

Note le condizioni iniziali di equilibrio e una variabile di stato finale, lo stato di equilibrio finale risulta implicitamente determinato dal tipo di cammino effettuato, ovvero dal tipo di trasformazione, che in questo caso è una politropica con c_x noto. Risultano pertanto determinate le variazioni di tutte le funzioni di stato e l'energetica del processo.

$$\Delta H = M \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$$\Delta U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$$

$$Q = M \cdot c_x \cdot \Delta T$$

$$L = \Delta U - Q = M \cdot (c_v - c_x) \cdot \Delta T$$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$p_1 = 2 \text{ bar} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 150 \text{ C} = 150 + 273.15 = 423.15 \text{ K}$$

$$T_2 = 200 \text{ C} = 200 + 273.15 = 473.15 \text{ K}$$

- Considerando come gas l'elio He si ottiene:

$$c_p = 5/2 \cdot (8314/4) = 5196.2 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_v = 3/2 \cdot (8314/4) = 3117.7 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_x = (5196.2 + 3117.7)/2 = 4157 \text{ J/(kgK)}$$

$$\Delta H = 0.5 \cdot 5196.2 \cdot (473.15 - 423.15) = 129.91 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = 0.5 \cdot 3117.7 \cdot (473.15 - 423.15) = 77.94 \text{ kJ}$$

$$Q = 0.5 \cdot 4157 \cdot (473.15 - 423.15) = 103.93 \text{ kJ}$$

$$L = 77.94 - 103.93 = -25.98 \text{ kJ}$$

- Considerando come gas l'ossigeno O₂ si ottiene:

$$c_p = 7/2 \cdot (8314/32) = 909.3 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_v = 5/2 \cdot (8314/32) = 649.5 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_x = (909.3 + 649.5)/2 = 779.4 \text{ J/(kgK)}$$

$$\Delta H = 0.5 \cdot 909.3 \cdot (473.15 - 423.15) = 22.73 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = 0.5 \cdot 649.5 \cdot (473.15 - 423.15) = 16.24 \text{ kJ}$$

$$Q = 0.5 \cdot 779.4 \cdot (473.15 - 423.15) = 19.49 \text{ kJ}$$

$$L = 16.24 - 19.49 = -3.25 \text{ kJ}$$

- Considerando come gas il vapore di zolfo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 c_p &= 5/2 \cdot (8314/32) = 649.5 \text{ J/(kgK)} \\
 c_v &= 3/2 \cdot (8314/32) = 389.7 \text{ J/(kgK)} \\
 c_x &= (649.5 + 389.7)/2 = 519.6 \text{ kJ/(kgK)} \\
 \Delta H &= 0.5 \cdot 649.5 \cdot (473.15 - 423.15) = 16.24 \text{ kJ} \\
 \Delta U &= 0.5 \cdot 389.7 \cdot (473.15 - 423.15) = 9.74 \text{ kJ} \\
 Q &= 0.5 \cdot 519.6 \cdot (473.15 - 423.15) = 12.99 \text{ kJ} \\
 L &= 9.74 - 12.99 = -3.25 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

- Considerando come gas l'azoto N_2 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 c_p &= 7/2 \cdot (8314/28) = 1039.3 \text{ J/(kgK)} \\
 c_v &= 5/2 \cdot (8314/28) = 742.3 \text{ J/(kgK)} \\
 c_x &= (1039.3 + 742.3)/2 = 890.8 \text{ J/(kgK)} \\
 \Delta H &= 0.5 \cdot 1039.3 \cdot (473.15 - 423.15) = 25.98 \text{ kJ} \\
 \Delta U &= 0.5 \cdot 742.3 \cdot (473.15 - 423.15) = 18.56 \text{ kJ} \\
 Q &= 0.5 \cdot 890.8 \cdot (473.15 - 423.15) = 22.27 \text{ kJ} \\
 L &= 18.56 - 22.27 = -3.71 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI:

Il risultato evidenzia che, conformemente all'espressione della variazione di energia interna ΔU , durante la trasformazione termodinamica si ha calore entrante e lavoro uscente.

La differenza tra le variazioni di entalpia ed energia interna è pari, per la relazione di Mayer, a $M \cdot R^* \cdot \Delta T$.

Oltre all'effetto della massa molare si nota, contrariamente a quanto accade per l'isoterma, l'effetto della struttura molecolare su ΔH , ΔU e Q mentre L risulta dipendere, come per tutte le politropiche ($L = M \cdot R^*/(n - 1) \cdot (T_2 - T_1)$), solamente dalla massa molecolare, aumentando al decrescere di quest'ultima (si confrontino ad esempio elio e ossigeno).

Esercizio 6.5

Argomento: Trasformazione politropica in sistema composto

Un sistema cilindro + pistone adiabatico contiene del gas perfetto ($M_g = 1 \text{ kg}$ di He, a $p_i = 5 \text{ bar}$ e $T_i = 25 \text{ }^\circ\text{C}$) caricato con nanoparticelle di alluminio ($c_{Al} = 905 \text{ J/kgK}$) la cui massa totale è 0.1 kg . Il pistone viene mosso comprimendo il gas in modo internamente reversibile fino alla pressione finale $p_f = 10 \text{ bar}$. Identificare la trasformazione subita dal gas e calcolare il lavoro richiesto dalla compressione.

SOLUZIONE:

Impostando il bilancio energetico sul sistema totale e sui sottosistemi gas (pedice g) e nanoparticelle (pedice p), non essendo presenti lavori di tipo non dilatativo, si ha:

$$\begin{aligned}
 \Delta U_{tot} &= L_{ext} + Q_{ext} \\
 \Delta U_g &= L_g + Q_g
 \end{aligned}$$

$$\Delta U_p = L_p + Q_p$$

dovendo però anche essere:

$$\Delta U_{tot} = \Delta U_g + \Delta U_p$$

$$L_{ext} = L_g$$

$Q_{ext} = 0$ perchè il sistema cilindro + pistone è adiabatico

$L_p = 0$ perchè le nanoparticelle non subiscono alcuna dilatazione

Sostituendo i risultati fin qui trovati nelle equazioni di bilancio energetico, si ottiene:

$$\Delta U_{tot} = L_g$$

$$\Delta U_{tot} = L_g + Q_g + Q_p$$

e dunque $L_g = L_g + Q_g + Q_p$, da cui $Q_p = -Q_g$.

Data la piccolissima dimensione delle nanoparticelle e l'elevata conduttività dell'alluminio, si può assumere che gas e nanoparticelle siano costantemente in equilibrio termico, per cui $dT_p = dT_g$ e si ha quindi:

$$M_p \cdot c_p \cdot dT_p = -M_g \cdot c_{x_g} \cdot dT_g \quad \text{e dunque} \quad c_{x_g} = -M_p/M_g \cdot c_p$$

Il c_{x_g} dipende quindi, oltreché da c_{Al} , dal rapporto tra le masse di alluminio e di gas presenti; che deve essere tale da rendere le capacità termiche in modulo uguali. Per cui:

$$\text{se } M_p = M_g \implies |c_{x_g}| = |c_{Al}|$$

$$\text{se } M_p \gg M_g \implies |c_{x_g}| \rightarrow \text{inf} \quad \text{trasformazione isoterma}$$

$$\text{se } M_p \ll M_g \implies |c_{x_g}| \rightarrow 0 \quad \text{trasformazione adiabatica}$$

In ogni caso la trasformazione è identificata: si tratta di una politropica (è internamente reversibile, per un gas perfetto e con c_{x_g} costante lungo la trasformazione) con c_{x_g} , e quindi n , noto.

$$\text{Il gas è monoatomico, quindi: } c_{v_g} = 3/2 \cdot R^* \quad c_{p_g} = 5/2 \cdot R^* \quad n = (c_{x_g} - c_{p_g}) / (c_{x_g} - c_{v_g})$$

$$T \cdot p^{(1-n)/n} = \text{cost} \quad p_i, p_f \text{ e } T_i \text{ sono note, per cui si può calcolare } T_f = T_i \cdot (p_f/p_i)^{(n-1)/n}$$

Per quanto riguarda il lavoro, si può determinare con l'equazione del lavoro per una politropica:

$$L_g = (p_i \cdot V_i) / (1 - n) \cdot [1 - (p_f/p_i)^{(n-1)/n}] = M_g \cdot R^* \cdot T_i / (1 - n) \cdot [1 - (p_f/p_i)^{(n-1)/n}]$$

o direttamente dal bilancio energetico: $L_g = \Delta U_{tot} = M_g \cdot c_{v_g} \cdot \Delta T_g + M_p \cdot c_p \cdot \Delta T_p$

RISULTATI NUMERICI:

$$R^* = 8314/4 = 2078.5 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_{v_g} = 3/2 \cdot 2078.5 = 3117.75 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_{p_g} = 5/2 \cdot 2078.5 = 5196.25 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_{Al} = 905 \text{ J/(kgK)}$$

$$M_g = 1 \text{ kg}$$

$$M_{Al} = 0.1 \text{ kg}$$

$$c_{x_g} = -0.1/1 \cdot 905 = -90.5 \text{ J/(kgK)}$$

$$n = (-90.5 - 5196.25) / (-90.5 - 3117.75) = 1.65$$

$$p_i = 5 \text{ bar} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_f = 10 \text{ bar} = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_i = 25 \text{ C} = 25 + 273.15 = 298.15 \text{ K}$$

$$T_f = 298.15 \cdot ((10 \cdot 10^5)/(5 \cdot 10^5))^{(1.65-1)/1.65} = 391.76 \text{ K}$$

$$\Delta U_g = 1 \cdot 3117.75 \cdot (391.76 - 298.15) = 291852 \text{ J/kg}$$

$$\Delta U_p = 0.1 \cdot 905 \cdot (391.76 - 298.15) = 8471 \text{ J/kg}$$

$$L_g = 291852 + 8471 = 300323 \text{ J/(kgK)}$$

Esercizio 6.6

Argomento: Politropica + scambiatore di calore

Una portata \dot{M}_g di aria (gas ideale biatomico) subisce una trasformazione politropica dalle condizioni $p_1 = 5 \text{ bar}$, $T_1 = 600 \text{ K}$, alla condizione $p_2 = 1 \text{ bar}$. Il c_x della trasformazione è $c_x = 1 \text{ kJ/kmolK}$. Dopo tale trasformazione tale portata entra in uno scambiatore di calore, isobaro e con mantello perfettamente adiabatico, all'interno del quale scambia calore con una portata $\dot{M}_a = 5 \text{ kg/s}$ di acqua che passa da: $T_{ai} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ a $T_{au} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$.

Determinare:

1. la portata \dot{M}_g di gas sapendo che esce dallo scambiatore alla temperatura $T_{gu} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$
2. l'irreversibilità totale del processo che avviene nello scambiatore di calore

SOLUZIONE:

%dati

P1=5e5;

T1=600;

P2=1e5;

MMa=28.96;

cx_mol=1000;

Ma=5;

Tai=20+273.15;

Tau=50+273.15;

Tgu=70+273.15;

%soluzione

cx=cx_mol/MMa;

Rs=8314/MMa;

cv=5/2*Rs;

cp=7/2*Rs;

n=(cx-cp)/(cx-cv);

T2=T1*(P1/P2)^((1-n)/n);

cpa=4186;

$$Q_{pa} = M a \cdot c_{pa} \cdot (T_{au} - T_{ai});$$

$$Mg = -Q_{pa} / (c_p \cdot (T_{gu} - T_2));$$

$$DS = Mg \cdot c_p \cdot \log(T_{gu}/T_2) + M a \cdot c_{pa} \cdot \log(T_{au}/T_{ai});$$

Esercizio 6.7

Argomento: Trasformazione non politropica

In una coppia cilindro stantuffo adiabatica è contenuta una massa $M = 385 \text{ g}$ di un gas perfetto triatomico di massa molare $M_M = 63 \text{ kg/kmol}$, in equilibrio alla temperatura iniziale di $35 \text{ }^\circ\text{C}$. A un certo istante viene azionata una ventolina che assorbe una potenza costante di 30 W per una durata di 9 minuti . Determinare il lavoro dilatativo sapendo che al pistone è consentita una espansione alla pressione esterna costante pari a 2 bar .

SOLUZIONE:

L'azione della ventolina è strettamente associata agli attriti generati nel gas rendendo quindi il processo non politropico. Dal momento che le condizioni iniziali di equilibrio richiedono l'equivalenza delle pressioni interna ed esterna (non è previsto un vincolo che blocchi il pistone supportando un eventuale disequilibrio barico), ed essendo dichiarata un'evoluzione isobara, risulta nota la pressione finale/iniziale del gas. Tuttavia l'accertata irreversibilità del processo non consente di determinare il lavoro scambiato secondo quanto previsto per le politropiche adiabatiche.

Per contro dal primo principio si ha:

$$M \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) = L_d + L^* = -M \cdot P \cdot (v_2 - v_1) + \dot{L}^* \cdot \tau$$

Le due incognite T_2 e v_2 sono legate dall'equazione di stato per cui: $v_2 = R^* \cdot T_2 / P$

L'equazione del primo principio consente di determinare T_2 : $T_2 = T_1 + L^* / (M \cdot c_P)$

e quindi L_d risulta: $L_d = -R^* \cdot L^* / c_P$

RISULTATI NUMERICI:

Si riportano le unità di misura nel sistema internazionale SI:

$$M = 385 \text{ g} = 385 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$T_1 = 35 \text{ }^\circ\text{C} = 35 + 273.15 = 308.15 \text{ K}$$

$$P = 2 \text{ bar} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\tau = 9 \text{ min} = 9 \cdot 60 = 540 \text{ s}$$

$$R^* = 8314/63 = 131.97 \text{ J/(kgK)}$$

$$c_P = 4 \cdot 131.97 = 527.87 \text{ J/(kgK)}$$

$$L^* = 30 \cdot 540 = 16.20 \text{ kJ}$$

La temperatura finale risulta: $T_2 = 308.15 + 16.20 \cdot 10^3 / (385 \cdot 10^{-3} \cdot 527.87) = 387.86 \text{ K}$

mentre il lavoro dilatativo è pari a: $L_d = -131.97 \cdot 16.20 \cdot 10^3 / 527.87 = -4050.08 \text{ J}$

OSSERVAZIONI:

Il lavoro calcolato con la procedura indicata, deve pur sempre coincidere con quello calcolato secondo la relazione $L = -M \cdot P_e \cdot \Delta v = -M \cdot R^* \cdot \Delta T$, come risulta verificato. Utilizzando la pressione esterna, si aggira il problema del non conoscere (a causa dell'irreversibilità interna) come evolve la trasformazione interna.

Si osservi anche che si raggiungerebbe lo stesso stato finale di equilibrio del caso irreversibile se, tolto il vincolo dell'adiabaticità, venisse fornita isobaricamente allo stesso sistema una quantità di energia sotto forma di calore pari a L^* . Dal punto di vista energetico Q e L^* sono indifferenti, non però così dal punto di vista della possibile reversibilità, e questa trasformazione fittizia segue un percorso differente da quella argomento dell'esercizio, per cui potrebbe solo essere utilizzata per calcolare valori che dipendano esclusivamente da funzioni di stato.

Per il calcolo del lavoro ad esempio si sarebbe potuto procedere valutando che:

$$l + q = \Delta u \quad \Rightarrow \quad l = \Delta u - q = c_V \Delta T - c_P \Delta T = -R^* \Delta T$$

riottenendo così ancora una volta la stessa espressione del lavoro, e potendosi calcolare ΔT dal fatto che il fittizio $Q = M c_P \Delta T$ è uguale a L^* .

Equazioni

Le equazioni che verranno utilizzate più frequentemente sono le seguenti, numerate in modo da poter poi far riferimento ad esse rapidamente nelle soluzioni degli esercizi:

$$X = \frac{M_{vapore}}{M_{aria\ secca}} \quad (7.2)$$

$$\varphi = \frac{P_V}{P_{VS} (T_{BS})} \quad (7.3)$$

$$X = \frac{MM_v}{MM_{as}} \frac{\varphi P_{VS}}{P - \varphi P_{VS}} \quad (7.4)$$

$$\varphi = \frac{X}{X + \frac{MM_v}{MM_{as}}} \frac{P}{P_{VS}} \quad (7.5)$$

$$\hat{h}_{AU} = c_{PAS}(T - 273.15) + X [\lambda_{LV}(0^\circ\text{C}) + c_{PV}(T - 273.15)] = c_{PAS}t + X [\lambda_{LV}(0^\circ\text{C}) + c_{PV}t] \quad (7.6)$$

a cui vanno aggiunte l' "equazione" della curva di saturazione liquido-vapore dell'acqua

$$P_{VS} = P_{VS}(T_{BS}) \quad (7.7)$$

e l'informazione sul processo di saturazione adiabatica:

$$\hat{h}_{AUBU} = \hat{h}_{AU\ iniziale} + (X_{BU} - X_{iniziale}) h_{H_2O\ liquida}(T_{BU}) \approx \hat{h}_{AU\ iniziale} \quad (7.8)$$

Esercizio 7.1

Argomento: Aria umida

Una portata $\dot{M}_{AU} = 2\text{ kg/s}$ di aria umida a $T_{BS_1} = 29^\circ\text{C}$ e $\varphi_1 = 90\%$ viene riscaldata a X costante fino a $T_{BS_2} = 39^\circ\text{C}$, quindi raffreddata a φ costante fino a portarla nuovamente a 29°C (T_{BS_3}). Rappresentare su un diagramma dell'aria umida a piacere lo stato iniziale e le trasformazioni subite da tale aria umida.

Calcolare il Δh e il ΔX complessivi dell'aria umida e la potenza da essa complessivamente scambiata con l'ambiente esterno.

SOLUZIONE:

La variazione totale di entalpia e di umidità assoluta sarà pari alla differenza tra i valori iniziali e quelli finali, per cui:

$$\Delta \hat{h}_{tot} = \hat{h}_3 - \hat{h}_1 \quad \text{e} \quad \Delta X_{tot} = X_3 - X_1$$

La potenza complessivamente scambiata con l'ambiente esterno è invece:

$$\dot{Q} = \dot{M}_{AS} \cdot \Delta \hat{h}_{tot} = \frac{\dot{M}_{AU}}{1 + X_1} \cdot \Delta \hat{h}_{tot}$$

Note T_{BS1} e φ_1 si calcolano X_1 dalla 7.4 e 7.7 e \hat{h}_1 dalla 7.6. Note T_{BS2} e $X_2 = X_1$ si calcola φ_2 dalla 7.5. Infine note $T_{BS3} = T_{BS1}$ e $\varphi_3 = \varphi_2$ si calcolano X_3 dalla 7.4 e 7.7 e \hat{h}_3 dalla 7.6.

RISULTATI NUMERICI:

I valori di entalpia ed umidità assoluta dei tre stati sono:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= 87.703 \text{ kJ/kg}_{AS} & \hat{h}_2 &= 98.174 \text{ kJ/kg}_{AS} & \hat{h}_3 &= 62.162 \text{ kJ/kg}_{AS} \\ X_1 &= 0.02292 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS} & X_2 &= 0.02292 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS} & X_3 &= 0.01292 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS} \end{aligned}$$

Per cui risulta:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{h}_{tot} &= 62.162 - 87.703 = -25.541 \text{ kJ/kg}_{AS} \\ \Delta X_{tot} &= 0.01292 - 0.02292 = -0.01 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS} \\ \dot{Q} &= 2/(1 + 0.02292) \cdot -25.541 = -49.94 \text{ kW} \end{aligned}$$

Esercizio 7.2

Argomento: Aria umida

Tre portate di aria umida:

- $\dot{M}_{AU_1} = 4 \text{ kg/s}$ $T_{BS_1} = 30 \text{ °C}$ $\varphi_1 = 30 \%$
- $\dot{M}_{AU_2} = 1 \text{ kg/s}$ $T_{BU_2} = 5 \text{ °C}$ $X_2 = 0.004 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$
- $\dot{M}_{AU_3} = 5 \text{ kg/s}$ $\varphi_3 = 0.9$ $X_3 = 0.018 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$

vengono miscelate adiabaticamente. Determinare analiticamente \hat{h} , X , T_{BS} , T_{BU} , T_R della miscela nello stato finale (esprimere i risultati in u.d.m. SI). Rappresentare gli stati iniziali delle arie umide e lo stato finale della miscela su un diagramma termodinamico a piacere.

SOLUZIONE:

Noti i valori di umidità assoluta, le portate di aria secca sono: $\dot{M}_{AS_i} = \dot{M}_{AU_i}/(1 + X_i)$.

Per quanto riguarda i valori di X ed \hat{h} :

- per il punto 1 note T_{BS1} e φ_1 si calcolano X_1 dalla 7.4 e 7.7 e \hat{h}_1 dalla 7.6;

- per il punto 2 note T_{BU2} e X_2 si calcola T_{BS2} dalla 7.8 e 7.4 [considerando che $\varphi(BU) = 1$] e quindi \hat{h}_2 dalla 7.6 e X_2 dalla 7.4;
- per il punto 3 note φ_3 e X_3 si calcola T_{BS3} dalla 7.5 e 7.7, quindi \hat{h}_3 dalla 7.6.

Impostando poi un bilancio energetico tra stato finale ed iniziale si ricava l'entalpia della miscela:

$$\hat{h}_m = \frac{\dot{M}_{AS1} \cdot \hat{h}_1 + \dot{M}_{AS2} \cdot \hat{h}_2 + \dot{M}_{AS3} \cdot \hat{h}_3}{\dot{M}_{AS1} + \dot{M}_{AS2} + \dot{M}_{AS3}}$$

Da un bilancio sull'acqua si ricava l'umidità assoluta della miscela:

$$X_m = \frac{\dot{M}_{AS1} \cdot X_1 + \dot{M}_{AS2} \cdot X_2 + \dot{M}_{AS3} \cdot X_3}{\dot{M}_{AS1} + \dot{M}_{AS2} + \dot{M}_{AS3}}$$

A partire da X_m e \hat{h}_m , con le consuete relazioni si possono poi determinare tutte le altre proprietà della miscela:

- note X_m e \hat{h}_m , T_{BS} è l'unica incognita nell'equazione 7.6;
- note X_m e T_{BS} , dall'equazione 7.5 unita alla relazione $P_{VS} = f(T_{BS})$ (leggibile sulla tabella dell'acqua a saturazione liquido-vapore) si ricava φ ;
- note T_{BS} e $P_{VS} = f(T_{BS})$, e moltiplicando quest'ultima per φ si ottiene P_V . A questo punto sempre nella tabella dell'acqua a saturazione si cerca il valore di temperatura per cui la pressione di saturazione è pari a P_V : per la definizione stessa di temperatura di rugiada, quest'ultimo valore è T_R ;
- il calcolo della T_{BU} è il più complesso. E' infatti necessario mettere a sistema le equazioni:

$$\hat{h}_{BU} = \hat{h}_m + (X_{BU} - X_m) h_{H_2O\ liquid}(T_{BU})$$

(nella quale - come si nota sostituendo l'espressione 7.6 in entrambi i membri - le incognite sono T_{BU} e X_{BU})

$$X_{BU} = \frac{MM_v}{MM_{as}} \frac{\varphi_{BU} P_{VS}}{P - \varphi_{BU} P_{VS}}$$

(nella quale le incognite sono X_{BU} e φ_{BU})

$$\varphi_{BU} = 1$$

$$P_{VS} = f(T_{BS})$$

Dato che l'ultima equazione è nota solo in forma tabellare o tramite equazioni approssimanti piuttosto complesse, la soluzione del sistema richiede in generale una procedura iterativa: si ipotizza un valore di T_{BU} (sfruttando l'informazione che $T_R \leq T_{BU} \leq T_{BS}$) e si procede per successivi raffinamenti finché le equazioni non sono tutte soddisfatte entro una soglia di approssimazione ritenuta accettabile.

RISULTATI NUMERICI:

Le tre portate di aria umida sono caratterizzate da:

- $\hat{h}_1 = 50.23 \text{ kJ/kg}_{AS}$ $X_1 = 0.008 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$ $\dot{M}_{AS_1} = 3.968 \text{ kg}_{AS}/\text{s}$
- $\hat{h}_2 = 18.84 \text{ kJ/kg}_{AS}$ $X_2 = 0.004 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$ $\dot{M}_{AS_2} = 0.996 \text{ kg}_{AS}/\text{s}$
- $\hat{h}_3 = 71.16 \text{ kJ/kg}_{AS}$ $X_3 = 0.018 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$ $\dot{M}_{AS_3} = 4.912 \text{ kg}_{AS}/\text{s}$

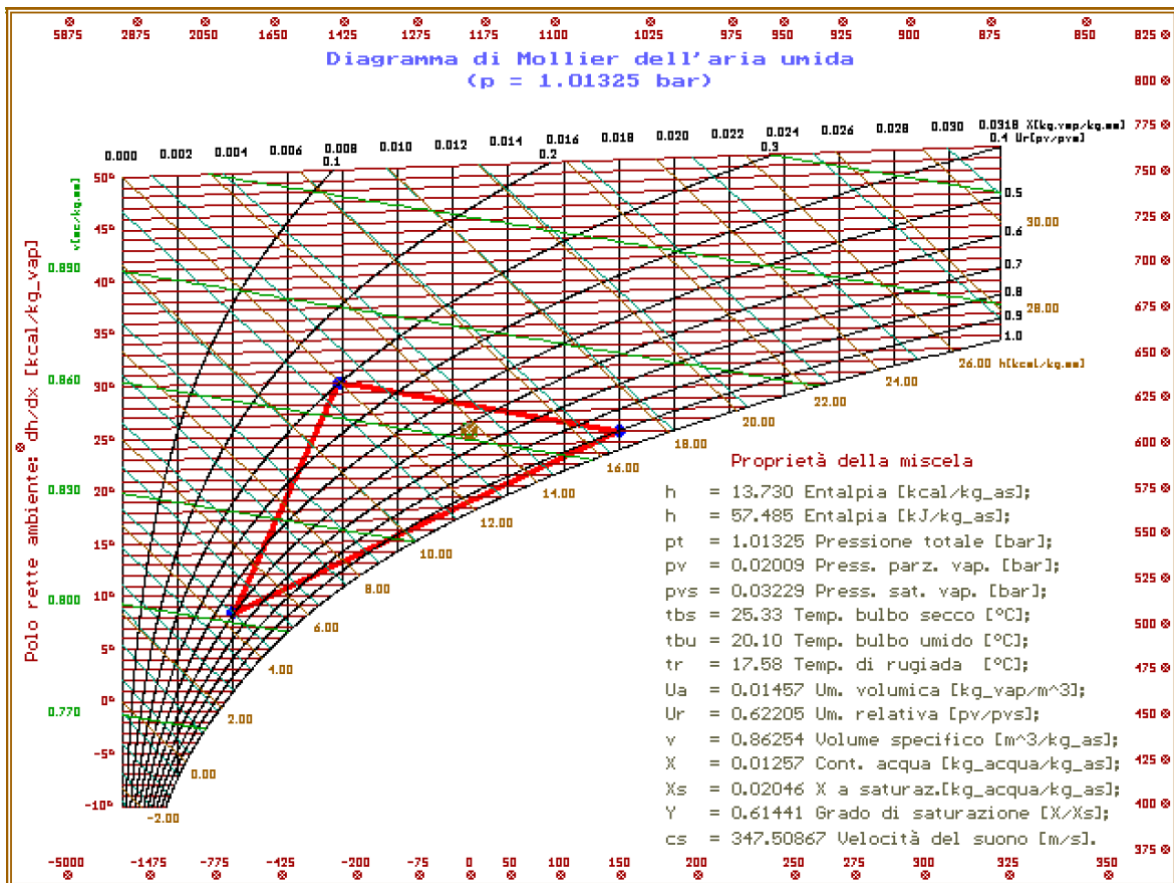
L'entalpia della miscela è pari a:

$$\hat{h}_m = (3.968 \cdot 50.23 + 0.996 \cdot 18.84 + 4.912 \cdot 71.16)/(3.968 + 0.996 + 4.912) = 57.47 \text{ kJ/kg}_{AS}$$

mentre l'umidità assoluta è:

$$X_m = (3.968 \cdot 0.008 + 0.996 \cdot 0.004 + 4.912 \cdot 0.018)/(3.968 + 0.996 + 4.912) = 0.01257 \text{ kg}_{H_2O}/\text{kg}_{AS}$$

Le altre proprietà sono indicate a destra del diagramma in figura.

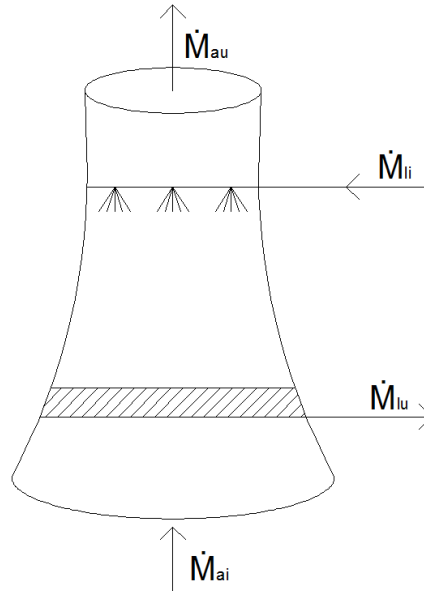


Esercizio 7.3

Argomento: Torre evaporativa

Si vogliono raffreddare $\dot{M}_{li} = 500000 \text{ kg/h}$ di acqua da $T_{li} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ a $T_{lu} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ utilizzando una torre di raffreddamento.

L'aria atmosferica entra a $T_{ai} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ con un'umidità relativa $\varphi = 50 \%$ es esce satura a $T_{au} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare la portata di aria e la quantità di acqua perduta per evaporazione.



SOLUZIONE:

Nella torre evaporativa l'acqua viene fatta scendere a pioggia nella torre, in modo che possa avere un'ampia superficie di contatto con l'aria umida che sale dal basso. L'aria salendo si riscalda e si umidifica e la sua massa volumica diminuisce: questo meccanismo assicura la circolazione naturale dell'aria (NOTA: nella realtà è spesso necessario introdurre anche un ventilatore ausiliario, che qui non verrà considerato).

Il processo è adiabatico ed isobaro, in regime stazionario. Trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale, considerando la portata di aria costante ($\dot{M}_{ai} = \dot{M}_{au} = \dot{M}_a$) si scrivono le equazioni di conservazione della massa (per l'acqua) e dell'energia:

$$\begin{cases} \dot{M}_{li} + \dot{M}_a \cdot X_{ai} = \dot{M}_{lu} + \dot{M}_a \cdot X_{au} \\ \dot{M}_{li} \cdot h_{li} + \dot{M}_a \cdot \hat{h}_{ai} = \dot{M}_{lu} \cdot h_{lu} + \dot{M}_a \cdot \hat{h}_{au} \end{cases}$$

Le condizioni (temperatura ed umidità relativa) di ingresso ed uscita dell'aria umida sono note: si possono quindi ricavare le umidità assolute e le entalpie. Per l'aria in ingresso:

$$X_{ai} = 0.622 \cdot \frac{\varphi_{ai} \cdot p_{VS}(T_{ai})}{p - \varphi_{ai} \cdot p_{VS}(T_{ai})}$$

$$\hat{h}_{ai} = 1.0048 \cdot T_{ai} + X_{ai} \cdot (2491.146 + 1.951 \cdot T_{ai})$$

mentre per l'aria in uscita:

$$x_{au} = 0.622 \cdot \frac{\varphi_{au} \cdot p_{VS}(T_{au})}{p - \varphi_{au} \cdot p_{VS}(T_{au})}$$

$$\hat{h}_{au} = 1.0048 \cdot T_{au} + X_{au} \cdot (2491.146 + 1.951 \cdot T_{au})$$

A questo punto, dato che l'entalpia dell'acqua liquida si ricava con la relazione $h_l = c_{pl} \cdot T_l$, le uniche incognite nel sistema sono la portata di acqua in uscita \dot{M}_{lu} e la portata di aria \dot{M}_a . Dall'equazione di conservazione della massa si esplicita la portata di acqua in uscita:

$$\dot{M}_{lu} = \dot{M}_{li} + (X_{ai} - X_{au}) \cdot \dot{M}_a$$

e la si sostituisce nell'equazione di conservazione dell'energia, da cui si ricava la portata di aria:

$$\dot{M}_a = \frac{\dot{M}_{li} \cdot (h_{li} - h_{lu})}{(X_{ai} - X_{au}) \cdot h_{lu} + \hat{h}_{au} - \hat{h}_{ai}}$$

nota la quale si ricava anche la portata di acqua in uscita.

La quantità di acqua perduta per evaporazione è quindi: $\Delta \dot{M}_l = \dot{M}_{li} - \dot{M}_{lu}$

RISULTATI NUMERICI:

Dalle tabelle dell'acqua, alle temperature di 20 °C e 35 °C la pressione di saturazione del vapore è $p_{VS}(20C) = 2.339$ kPa e $p_{VS}(35C) = 5.628$ kPa.

Per cui umidità assoluta ed entalpia dell'aria in ingresso ed in uscita sono rispettivamente:

$$X_{ai} = 0.622 \cdot \frac{0.5 \cdot 2.339}{101.325 - 0.5 \cdot 2.339} = 7.26 \text{ g/kg}_{as}$$

$$\hat{h}_{ai} = 1.0048 \cdot 20 + 7.26 \cdot 10^{-3} \cdot (2491.146 + 1.951 \cdot 20) = 38.46 \text{ kJ/kg}_{as}$$

$$X_{au} = 0.622 \cdot \frac{1 \cdot 5.628}{101.325 - 1 \cdot 5.628} = 36.58 \text{ g/kg}_{as}$$

$$\hat{h}_{au} = 1.0048 \cdot 35 + 36.58 \cdot 10^{-3} \cdot (2491.146 + 1.951 \cdot 35) = 128.79 \text{ kJ/kg}_{as}$$

La portata di aria risulta dunque:

$$\dot{M}_a = \frac{500000 \cdot (4.186 \cdot 40 - 4.186 \cdot 20)}{(7.26 - 36.58) \cdot 10^{-3} \cdot 4.186 \cdot 20 + 128.79 - 38.46} = 476450 \text{ kg/h}$$

mentre la portata di liquido in uscita è pari a:

$$\dot{M}_{lu} = 500000 \cdot (7.26 - 36.58) \cdot 10^{-3} \cdot 476450 = 486030 \text{ kg/h}$$

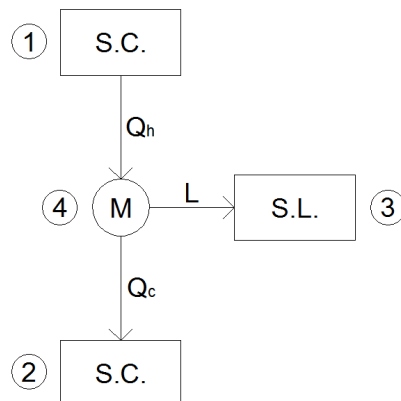
da cui la quantità di acqua perduta è: $\Delta \dot{M}_l = 500000 - 486030 = 13970 \text{ kg/h}$

NOTA: in tutti i seguenti esercizi i calori Q_h e Q_c scambiati dal fluido di lavoro con le sorgenti saranno calcolati e utilizzati sempre secondo il punto di vista del fluido di lavoro. Nei dati dei testi invece potranno comparire indicati in valore assoluto.

Esercizio 8.1

Argomento: *Macchina motrice*

Determinare il lavoro perso da una macchina termodinamica motrice irreversibile che opera con sorgenti a temperature $T_h = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_c = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, sapendo che prelevando $Q_h = 800 \text{ kJ}$ si produce $L = 300 \text{ kJ}$.



SOLUZIONE:

Impostando il bilancio energetico sulla macchina (punto 4), si ottiene che il lavoro prodotto è pari a:

$$L = -Q_h - Q_c$$

Impostando invece il bilancio di entropia su tutto il sistema, si ricava che la variazione totale di entropia è pari al contributo dei singoli componenti, ovvero:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 \geq 0$$

dove:

- ΔS_1 è la variazione di entropia legata allo scambio di calore con la sorgente isoterma calda (calore uscente dalla sorgente), che risulta pari a:

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_h}{T_h}$$

- ΔS_2 è la variazione di entropia legata allo scambio di calore con la sorgente isoterma fredda (calore entrante nella sorgente), che risulta pari a:

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_c}{T_c}$$

- ΔS_3 è la variazione di entropia legata all'interazione di tipo lavoro, che viene assunta trascurabile.
- ΔS_4 è la variazione di entropia della macchina, pari a zero dal momento che la macchina è ciclica e quindi stato iniziale e finale coincidono.
- ΔS_{tot} è la variazione totale di entropia, nulla solo nel caso di macchina reversibile.

Il lavoro perso dalla macchina è pari alla differenza tra il lavoro massimo ottenibile (macchina reversibile) ed il lavoro effettivamente prodotto, per cui risulta:

$$|L_{perso}| = |L_{max}| - |L|$$

Nel caso di macchina reversibile, dal bilancio di entropia si ricava il calore scaricato nella sorgente fredda:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0 \quad \implies \quad -\frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_c}{T_c} = 0 \quad \implies \quad Q_c = -Q_h \cdot \frac{T_c}{T_h}$$

Il lavoro massimo ottenibile si ricava dal bilancio di energia applicato alla macchina:

$$L_{max} = -Q_h - Q_c$$

e quindi (L dato) è immediato ricavare il lavoro perso.

Per macchine dirette, rendimento di primo e secondo principio sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\eta_I = -\frac{L}{Q_h} \quad \eta_{II} = \frac{L}{L_{max}}$$

RISULTATI NUMERICI:

Il calore scaricato nella sorgente fredda, nel caso di macchina reversibile è (temperature espresse in Kelvin): $Q_c = 800 \cdot 298.15/873.15 = 273.18 \text{ kJ}$

Il lavoro massimo ottenibile è dunque: $L_{max} = -800 + 273.08 = -526.92 \text{ kJ}$

per cui: $L_{perso} = -526.92 - (-300) = -226.92 \text{ kJ}$

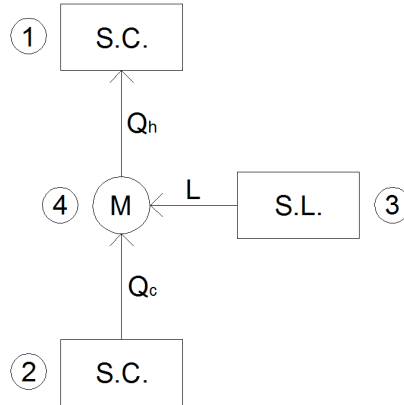
Il rendimento di primo principio è pari a: $\eta_I = -(-300)/800 = 0.375$

mentre quello di secondo principio: $\eta_{II} = (-300)/(-526.92) = 0.569$

Esercizio 8.2

Argomento: Frigorifero

Una macchina operatrice (frigorifero) opera in modo irreversibile tra due sorgenti a temperatura costante $T_h = 300\text{ K}$ e $T_c = 250\text{ K}$. La potenza termica da estrarre al serbatoio freddo è pari a 25 kW , mentre il rendimento di secondo principio della macchina è 0.55 . Calcolare la potenza meccanica necessaria al funzionamento della macchina.



SOLUZIONE:

Impostando il bilancio energetico sulla macchina (punto 4), si ottiene che il lavoro necessario al funzionamento della macchina è pari a:

$$L = -Q_h - Q_c$$

Impostando invece il bilancio di entropia su tutto il sistema, con considerazioni analoghe all'esercizio precedente si ottiene:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_c}{T_c} \geq 0$$

Per un frigorifero l'efficienza è pari a: $\varepsilon_f = \frac{Q_c}{L}$

mentre il rendimento di secondo principio: $\eta_{II} = \frac{\varepsilon_{f, reale}}{\varepsilon_{f, rev}} = \frac{Q_c/L_{reale}}{Q_c/L_{rev}}$

che, a pari effetto utile Q_c , diventa: $\eta_{II} = \frac{L_{rev}}{L_{reale}}$

Nel caso di macchina reversibile (ideale), dal bilancio di entropia si ricava il calore ceduto alla sorgente calda:

$$-\frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_c}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_h = -Q_c \cdot \frac{T_h}{T_c}$$

dal bilancio di energia, invece, si ricava il lavoro reversibile necessario al funzionamento della macchina:

$$L_{rev} = -Q_h - Q_c$$

Il lavoro reale si ottiene dalla definizione di secondo principio:

$$\eta_{II} = \frac{L_{rev}}{L_{reale}} \quad \Rightarrow \quad L_{reale} = \frac{L_{rev}}{\eta_{II}}$$

RISULTATI NUMERICI:

Il dato di ingresso è la potenza termica estratta dalla sorgente fredda. Per la risoluzione numerica del problema si utilizzano ugualmente i bilanci e le definizioni scritti in precedenza in termini energetici, sostituendo ai calori e ai lavori le corrispondenti potenze.

Se il processo è reversibile la potenza termica scaricata alla sorgente calda è pari a:

$$\dot{Q}_h = -25 \cdot 300/250 = -30 \text{ kW}$$

La potenza meccanica ideale risulta: $\dot{L}_{rev} = -(-30 + 25) = 5 \text{ kW}$

mentre quella reale è: $\dot{L}_{reale} = 5/0.55 = 9.1 \text{ kW}$

L'efficienza reale del frigorifero è pari a: $\varepsilon_{f, reale} = 25/9.1 = 2.75$

mentre quella ideale è: $\varepsilon_{f, rev} = 25/5 = 5$

Esercizio 8.3

Argomento: Ciclo di Carnot diretto

Un ciclo di Carnot diretto funziona tra due sorgenti isoterme a T_h e T_c assorbendo dalla prima $Q_h = 1000 \text{ J}$ e cedendo alla seconda $Q_c = 400 \text{ J}$, con un rendimento di secondo principio $\eta_{II} = 0.75$. Sapendo che $T_h = 750 \text{ }^\circ\text{C}$, determinare l'irreversibilità totale del sistema e l'energia utilizzabile non utilizzata.

SOLUZIONE:

Il rendimento di primo principio è dato da:

$$\eta_I = -L_n/Q_h = -(-Q_h - Q_c)/Q_h = (1000 - 400)/1000 = 0.6$$

Dalla definizione di rendimento di secondo principio si ricava il rendimento del ciclo di Carnot equivalente reversibile:

$$\eta_{II} = \frac{\eta_I}{\eta_{rev}} \quad \Longrightarrow \quad \eta_{rev} = \frac{\eta_I}{\eta_{II}} = \frac{0.6}{0.75} = 0.8$$

per cui il lavoro netto del ciclo reversibile risulta:

$$L_{n, rev} = -Q_h \cdot \eta_{rev} = -1000 \cdot 0.8 = -800 \text{ J}$$

Il lavoro perso (uguale in modulo e opposto in segno all'energia utilizzabile non utilizzata) è dunque pari a:

$$L_p = L_{n, rev} - L_n = -800 - (-600) = -200 \text{ J}$$

È possibile calcolare la temperatura della sorgente fredda dalla definizione di rendimento per il ciclo di Carnot reversibile:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad \Longrightarrow \quad T_c = T_h - \eta_{rev} \cdot T_h = 1023.15 - 0.8 \cdot 1023.15 = 204.63 \text{ K}$$

Quindi dal bilancio entropico per il sistema ciclo + sorgenti, si ricava l'irreversibilità totale del sistema:

$$\Delta S_{tot} = -\frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_c}{T_c} = -\frac{1000}{1023.15} + \frac{400}{204.53} = 0.978 \text{ J/K}$$

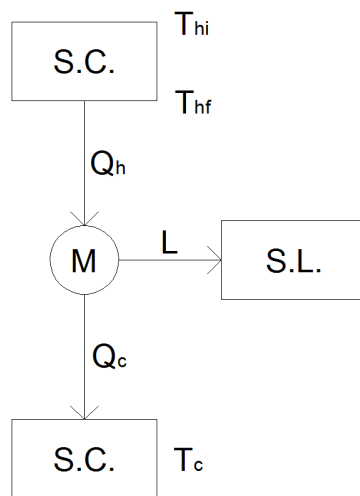
In alternativa scrivendo la definizione del rendimento di secondo principio ed il bilancio entropico per il sistema ciclo + sorgenti, si ha immediatamente un sistema di due equazioni nelle due sole incognite T_c e ΔS_{tot} che possono quindi essere facilmente determinate. L'energia utilizzabile non utilizzata è quindi immediatamente calcolabile come $T_c \cdot \Delta S_{tot}$.

Esercizio 8.4

Argomento: Macchina motrice con sorgente a T variabile

Si supponga di voler sfruttare l'energia posseduta dai residui del ciclo di lavorazione di un'acciaieria con l'impiego di una macchina motrice che opera in contatto con l'atmosfera ($T_c = 20^\circ\text{C}$).

Determinare il massimo lavoro ottenibile durante il raffreddamento dell'acciaio tra $T_{hi} = 200^\circ\text{C}$ e $T_{hf} = 50^\circ\text{C}$ (calore specifico dell'acciaio $c = 450\text{ J/kgK}$).



SOLUZIONE:

La macchina opera tra una sorgente calda a temperatura variabile (acciaio che si raffredda da T_{hi} a T_{hf}) ed una sorgente fredda a temperatura costante (atmosfera).

Si vuole determinare il massimo lavoro ottenibile, per cui si deve supporre di avere una macchina reversibile ($\Delta s_{tot} = 0$).

Impostando il bilancio entropico sull'intero sistema, in termini specifici perchè non si ha alcun dato sulle portate, si ottiene:

$$\Delta s_{tot} = \Delta s_{S.C.h} + \Delta s_{S.C.c} + \Delta s_M + \Delta s_{S.L.} = 0$$

La variazione di entropia della macchina Δs_M e quella legata all'interazione lavoro $\Delta s_{S.L.}$ sono nulle, la sorgente calda è a temperatura variabile, mentre quella fredda è a temperatura costante, per cui risulta:

$$c \cdot \ln(T_{hf}/T_{hi}) - q_c/T_c = 0$$

dalla quale si ricava il calore ceduto alla sorgente fredda: $q_c = T_c \cdot c \cdot \ln(T_{hf}/T_{hi})$

Il calore prelevato dalla sorgente calda è invece pari a: $q_h = -c \cdot (T_{hf} - T_{hi})$

quindi, impostando il bilancio energetico sulla macchina M , si ottiene il massimo lavoro ottenibile:

$$l_{rev} = -q_h - q_c$$

RISULTATI NUMERICI:

Il calore ceduto all'atmosfera è pari a: $q_c = 293.15 \cdot 450 \cdot \ln(323.15/473.15) = -50298.7 \text{ J/kg}$

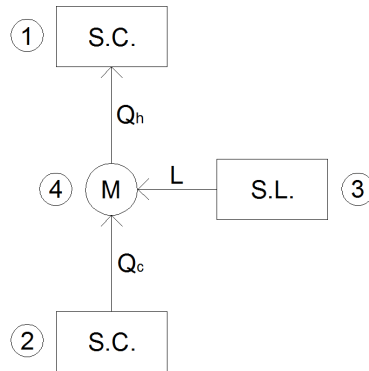
mentre quello sottratto dalla sorgente calda è: $q_h = -450 \cdot (50 - 200) = 67500 \text{ J/kg}$

Per cui il massimo lavoro ottenibile risulta: $l_{rev} = -67500 - (-50298.7) = -17201.3 \text{ J/kg}$

Esercizio 8.5

Argomento: *Macchina frigorifera con sorgente a T variabile*

Una pista di pattinaggio circolare ($D = 30 \text{ m}$, $s = 20 \text{ cm}$) costituita da ghiaccio a $T_g = -10 \text{ °C}$ ($\rho_g = 900 \text{ kg/m}^3$) viene prodotta partendo da acqua a $T_{h_2o} = 15 \text{ °C}$ mediante una macchina termodinamica operatrice reversibile che opera in contatto con l'atmosfera a 20 °C . Calcolare il lavoro necessario al funzionamento della macchina e la relativa efficienza.



SOLUZIONE:

La macchina opera tra una sorgente calda a temperatura costante (atmosfera) ed una sorgente fredda a temperatura variabile (acqua che si raffredda da $T_{ci} = T_{h_2o} = 15 \text{ °C}$ fino a diventare ghiaccio a $T_{cf} = T_g = -10 \text{ °C}$).

Il calore sottratto dalla sorgente fredda è pari a:

$$Q_c = -Q_{S.C.} = -M_g \cdot (h_f - h_i)$$

dove:

- M_g è la massa di ghiaccio, che è la stessa di quella dell'acqua (ma il volume dell'acqua è inferiore), pari a:

$$M_g = \rho_g \cdot ((\pi \cdot D^2/4) \cdot s)$$

- h_i è l'entalpia dell'acqua liquida: $h_i = h_{rif} + c_{h_2o} \cdot (T_{h_2o} - T_{rif})$
- h_f è l'entalpia del ghiaccio: $h_f = h_{rif} + \Delta h_{L \rightarrow G} + c_g \cdot (T_g - T_{rif})$

La macchina è reversibile, per cui $\Delta S_{tot} = 0$. Impostando il bilancio entropico sull'intero sistema si ottiene:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{S.C.h} + \Delta S_{S.C.c} + \Delta S_M + \Delta S_{S.L.} = 0$$

La variazione di entropia della macchina Δs_M e quella legata all'interazione lavoro $\Delta S_{S.L.}$ sono nulle. La variazione di entropia della sorgente calda a temperatura costante è pari a:

$$\Delta S_{S.C.h} = -Q_h/T_h$$

mentre quella della sorgente fredda:

$$\Delta S_{S.C.c} = M \cdot (s_f - s_i)$$

dove:

- s_f è l'entropia specifica dello stato finale (ghiaccio): $s_f = \Delta h_{L \rightarrow G}/T_{P.T.} + c_g \cdot \ln(T_g/T_{P.T.})$
- s_i è l'entropia specifica dello stato iniziale (acqua): $s_i = c_{h_2o} \cdot \ln(T_{h_2o}/T_{P.T.})$

Sostituendo nel bilancio di entropia le espressioni appena ricavate di $\Delta S_{S.C.h}$ e di $\Delta S_{S.C.c}$, si ricava il calore ceduto alla sorgente calda:

$$Q_h = T_h \cdot \Delta S_{S.C.c} = T_h \cdot M \cdot (\Delta h_{L \rightarrow G}/T_{P.T.} + c_g \cdot \ln(T_g/T_{P.T.}) - c_{h_2o} \cdot \ln(T_{h_2o}/T_{P.T.}))$$

Noti Q_c e Q_h , impostando il bilancio energetico sulla macchina M si ottiene il lavoro necessario al funzionamento della macchina:

$$L = -Q_c - Q_h$$

da cui l'efficienza del frigorifero: $\varepsilon_f = Q_c/L$

RISULTATI NUMERICI:

La massa di ghiaccio è pari a: $M = 900 \cdot ((3.14 \cdot 30^2/4) \cdot 0.2) = 127170$ kg

ed il calore da sottrarre alla sorgente fredda risulta:

$$Q_c = 127170 \cdot [4.186 \cdot 15 - (-335 + 2.04 \cdot (-10))] = 53.2 \cdot 10^6 \text{ kJ}$$

La variazione di entropia della sorgente fredda è pari a:

$$\Delta S_{S.C.c} = 127170 \cdot \left(\frac{-335}{273.16} + 2.04 \cdot \ln \left(\frac{263.15}{273.16} \right) - 4.186 \cdot \ln \left(\frac{288.15}{273.16} \right) \right) = -194.3 \cdot 10^3 \text{ kJ/K}$$

da cui il calore ceduto alla sorgente calda è: $Q_h = 293.15 \cdot (-194.3 \cdot 10^3) = -56.9 \cdot 10^6 \text{ kJ}$

Il lavoro necessario al funzionamento della macchina è quindi:

$$L = (-53.2 - (-56.9)) \cdot 10^6 = 3.7 \cdot 10^6 \text{ kJ (entrante)}$$

e l'efficienza della macchina risulta: $\varepsilon_f = (53.2 \cdot 10^6)/(3.7 \cdot 10^6) = 14.38$

Esercizio 8.6

Argomento: Pompa di calore

In un capannone industriale con un volume $V_a = 4000 \text{ m}^3$ l'aria ha una temperatura di $T_{ai} = 14$ °C ed una pressione $p_{ai} = 1 \text{ atm}$. Il capannone, supposto termicamente isolato verso l'esterno e a volume costante, viene riscaldato fino alla temperatura finale $T_{af} = 25$ °C con l'impiego di una pompa di calore con $COP = 10$, che opera utilizzando una sorgente fredda alla temperatura costante $T_c = 10$ °C. Determinare:

1. il lavoro necessario per eseguire il riscaldamento

2. la produzione di entropia

SOLUZIONE:

Il capannone ha un volume costante, pertanto nel momento in cui l'aria interna viene riscaldata si possono verificare due situazioni: o la dilatazione dell'aria viene compensata tramite trafiletti attraverso le intercapedini tra finestre e muri, ecc. (e quindi si ha un sistema aperto in condizioni tempovarianti, senza ingressi ma con uscite) oppure - se si ipotizza un capannone "sigillato" - si avrà un incremento della pressione interna. La situazione realistica è la prima, che si configura però come situazione a P costante ma massa d'aria variabile e quindi complica la soluzione. Per semplicità quindi l'esercizio verrà risolto utilizzando la seconda ipotesi, non realistica per un capannone, che permette però di assumere che l'aria all'interno del capannone subisce una trasformazione a volume (e massa) costante.

Il calore che deve essere fornito per il riscaldamento dell'aria, considerata gas perfetto biatomico ($M_M = 28.96$ g/mol), è pari a:

$$Q_h = -M_a \cdot c_v \cdot (T_{af} - T_{ai}) = -(\rho_a \cdot V_a) \cdot (5/2 \cdot R/M_M) \cdot (T_{af} - T_{ai})$$

Dalla definizione del COP della pompa di calore è quindi possibile ricavare il lavoro che deve essere fornito alla macchina:

$$COP = -Q_h/L \quad \implies \quad L = -Q_h/COP$$

Impostando il bilancio energetico sulla macchina, si ricava il calore che deve essere prelevato dalla sorgente fredda:

$$L = -Q_h - Q_c \quad \implies \quad Q_c = -L - Q_h$$

La produzione di entropia si determina con il bilancio entropico sull'intero sistema:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{S.C.h} + \Delta S_{S.C.c} + \Delta S_M + \Delta S_{S.L.}$$

La variazione di entropia della macchina ΔS_M e quella legata all'interazione lavoro $\Delta S_{S.L.}$ sono nulle. La variazione di entropia della sorgente calda, a temperatura variabile (aria che subisce una trasformazione a volume costante), è pari a:

$$\Delta S_{S.C.h} = M \cdot \Delta s = M \cdot (c_v \cdot \ln(T_{af}/T_{ai}) + R^* \cdot \ln(v_{af}/v_{ai})) = M \cdot c_v \cdot \ln(T_{af}/T_{ai})$$

mentre quella della sorgente fredda, a temperatura costante:

$$\Delta S_{S.C.c} = -Q_c/T_c$$

per cui la variazione totale di entropia risulta:

$$\Delta S_{tot} = M \cdot c_v \cdot \ln(T_{af}/T_{ai}) - Q_c/T_c$$

RISULTATI NUMERICI:

Il calore per riscaldare l'aria è pari a:

$$Q_h = -(1.225 \cdot 4000) \cdot (5/2 \cdot 8314/28.96) \cdot (25 - 14) = -38.68 \text{ MJ}$$

mentre il lavoro da fornire alla macchina (entrante) risulta: $L = -(-38.68)/10 = 3.868$ MJ da cui si ricava il calore da sottrarre alla sorgente fredda:

$$Q_c = -3.868 - (-38.68) = 34.81 \text{ MJ}$$

La produzione di entropia del processo è pari a:

$$\Delta S_{tot} = (1.225 \cdot 4000) \cdot (5/2 \cdot 8314/28.96 \cdot 10^{-3}) \cdot \ln \left(\frac{298.15}{287.15} \right) - \frac{34.81 \cdot 10^3}{283.15} = 9.3 \text{ kJ/K}$$

Esercizio 8.7

Argomento: Macchina frigorifera

In una macchina frigorifera di un impianto di condizionamento ambientale si tratta una portata di $\dot{M}_a = 30 \text{ kg/min}$ di aria, che viene raffreddata a pressione costante dalla temperatura $T_{ai} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ alla temperatura $T_{af} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$. Come sorgente superiore si utilizza un ambiente alla temperatura costante $T_h = 38 \text{ }^\circ\text{C}$. Calcolare la potenza minima necessaria per eseguire il processo.

SOLUZIONE:

L'aria ambiente subisce una trasformazione a pressione costante. La potenza termica che deve essere sottratta per il raffreddamento dell'aria, considerata gas perfetto biatomico ($M_M = 28.96 \text{ g/mol}$), è pari a:

$$\dot{Q}_c = \dot{M}_a \cdot c_p \cdot (T_{ai} - T_{af}) = \dot{M}_a \cdot (7/2 \cdot R/M_M \cdot (T_{ai} - T_{af}))$$

La minima potenza necessaria per eseguire il processo si ottiene nel caso di macchina reversibile. Per cui impostando il bilancio entropico (in termini di potenza) sull'intero sistema ed imponendo la condizione $\Delta \dot{S}_{tot} = 0$ (macchina reversibile), risulta:

$$\Delta \dot{S}_{tot} = \Delta \dot{S}_{S.C.h} + \Delta \dot{S}_{S.C.c} + \Delta \dot{S}_M + \Delta \dot{S}_{S.L.} = 0$$

La variazione di entropia della macchina $\Delta \dot{S}_M$ e quella legata all'interazione lavoro $\Delta \dot{S}_{S.L.}$ sono nulle. La variazione di entropia della sorgente calda, a temperatura costante, è pari a:

$$\Delta \dot{S}_{S.C.h} = -\dot{Q}_h/T_h$$

mentre quella della sorgente fredda, a temperatura variabile (aria che subisce una trasformazione a pressione costante):

$$\Delta \dot{S}_{S.C.c} = \dot{M} \cdot \Delta s = \dot{M} \cdot (c_p \cdot \ln(T_{af}/T_{ai}) - R^* \cdot \ln(p_{af}/p_{ai})) = \dot{M} \cdot c_p \cdot \ln(T_{af}/T_{ai})$$

Sostituendo nel bilancio di entropia le espressioni appena ricavate di $\Delta \dot{S}_{S.C.h}$ e di $\Delta \dot{S}_{S.C.c}$, si ricava la potenza termica ceduta alla sorgente calda:

$$\dot{Q}_h = T_h \cdot \Delta \dot{S}_{S.C.c} = T_h \cdot \dot{M} \cdot c_p \cdot \ln(T_{af}/T_{ai})$$

quindi, impostando il bilancio energetico sulla macchina M , si ottiene la minima potenza necessaria per eseguire il processo:

$$\dot{L} = -\dot{Q}_c - \dot{Q}_h$$

RISULTATI NUMERICI:

La potenza termica prelevata dalla sorgente fredda è pari a:

$$\dot{Q}_c = (30/60) \cdot (7/2 \cdot 8314/28.96) \cdot (35 - 15) = 10048 \text{ W}$$

Dal bilancio entropico si ricava la potenza termica ricevuta dalla sorgente calda:

$$\dot{Q}_h = 311.15 \cdot \left[(30/60) \cdot (7/2 \cdot 8314/28.96) \cdot \ln \left(\frac{288.15}{308.15} \right) \right] = -10489 \text{ W}$$

La minima potenza necessaria per eseguire il processo risulta:

$$\dot{L} = -10048 - (-10489) = 441 \text{ W}$$

Esercizio 8.8

Argomento: Ciclo termodinamico diretto

La sorgente calda di un ciclo termodinamico diretto è una portata $\dot{M}_V = 50 \text{ kg/s}$ che passa dallo stato di vapore saturo a quello di liquido saturo a $P_H = 10 \text{ bar}$, mentre la sorgente fredda è acqua liquida che passa da $T_{ai} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ a $T_{au} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$. Sapendo che il rendimento di Primo Principio del ciclo è $\eta_I = 0.25$, determinare la potenza meccanica fornita dal ciclo, la portata di acqua che costituisce la sorgente fredda e l'entropia totale prodotta per unità di tempo durante il processo ciclico.

SOLUZIONE:

%DATI

Mv=50;

Ph=10e5;

Tai=15+273.15;

Tau=35+273.15;

etaI=0.25;

%SOLUZIONE

%da tabella le proprietà di vapore e liquido saturi a Ph

Th=180+273.15;

hvs=2777.2e3;

hls=763.19e3;

Qsh=Mv*(hls-hvs); %punto di vista della sorgente calda

Qh=-Qsh; %punto di vista del ciclo

%potenza meccanica

L=-etaI*Qh;

Qc=-Qh-L;

%portata di acqua

%essendo $|Q_c| = M_c \cdot c_{pc} \cdot (T_{cu} - T_{ci})$

cpa=4186;

Ma=-Qc/(cpa*(Tau-Tai));

%variazione entropica

DS=Qsh/Th+Ma*cpa*log(Tau/Tai);

RISULTATI NUMERICI:

DS	31185.075202	L	-25175125.000000	Ma	902.118669	Mv	50.000000
Ph	1000000.000000	Qc	-75525375.000000	Qh	100700500.000000	Qsh	-100700500.000000
Tai	288.150000	Tau	308.150000	Th	453.150000	cpa	4186.000000
$etaI$	0.250000	hls	763190.000000	hvs	2777200.000000		

Esercizio 8.9

Argomento: *Ciclo termodinamico diretto*

Una massa $M_{Fe} = 20$ kg di ferro ($c_P = 0.45$ kJ/kgK) inizialmente a $T_{Fe1} = 700$ °C, cede calore a pressione costante a un ciclo termodinamico diretto costituito da due adiabatiche reversibili e da due isoterme. A sua volta tale ciclo cede calore a una sorgente fredda (pozzo) a $T_C = 20$ °C. Sapendo che il calore assorbito dal ciclo è $Q_H = 3$ MJ e che il suo rendimento di primo principio η_I è pari a 0.2, determinare l'irreversibilità del processo, l'energia utilizzabile non utilizzata e il rendimento di secondo principio.

SOLUZIONE:

%DATI

MFe=20;

cPFe=450;

TFe1=700+273.15;

TC=20+273.15;

QH=3e6;

etaI=0.2;

%SOLUZIONE

%Noti QH e il rendimento di I Principio, si calcolano immediatamente Lreale
%e QC

L=-etaI*QH;

QC=-QH-L;

%Il DS della sorgente fredda è quindi immediatamente calcolabile

DSC=-QC/TC;

%Per la sorgente calda invece la T è variabile e quindi è necessario

%determinare la T finale ed il DS correttamente

TFe2=TFe1-QH/(cPFe*MFe);

DSH=MFe*cPFe*log(TFe2/TFe1);

DStot=DSH+DSC;

Eunu=DStot*TC;

Lid=L-Eunu; %Eunu>0, Lperso=-Eunu

etaICR=-Lid/QH;

etaII=etaI/etaICR;

RISULTATI NUMERICI:

<i>DSC</i>	8186.935016	<i>DSH</i>	-3774.209001	<i>DStot</i>	4412.726015	<i>Eunu</i>	1293590.631255
<i>L</i>	-600000.000000	<i>Lid</i>	-1893590.631255	<i>MFe</i>	20.000000	<i>QC</i>	-2400000.000000
<i>QH</i>	3000000.000000	<i>TC</i>	293.150000	<i>TFe1</i>	973.150000	<i>TFe2</i>	639.816667
<i>cPFe</i>	450.000000	<i>etaI</i>	0.200000	<i>etaICR</i>	0.631197	<i>etaII</i>	0.316858

Esercizio 8.10

Argomento: Ciclo triangolare

Un ciclo a gas ideale biatomico di massa molare $M_M = 29 \text{ kg/kmol}$ è costituito dalle seguenti trasformazioni:

1. compressione politropica da $p_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ a $p_2 = 5 \text{ bar}$, $T_2 = 150 \text{ }^\circ\text{C}$
2. espansione isoterma sino alla pressione $p_3 = p_1$
3. raffreddamento isobaro sino alla temperatura iniziale $T_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$

Sapendo che le temperature della sorgente e del pozzo sono rispettivamente pari a $T_h = 850 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_c = 15 \text{ }^\circ\text{C}$, si determino: il lavoro netto fornito dal ciclo, i rendimenti di primo e secondo principio, l'energia utilizzabile non utilizzata (lavoro perso per irreversibilità).

SOLUZIONE:

Si ha un ciclo triangolare costituito da:

1. una trasformazione politropica di cui sono noti gli estremi. È quindi possibile determinare l'indice n della politropica da:

$$P^{(1-n)/n} \cdot T = \text{cost.}$$

da cui $n = 1.26$.

Ricordando la definizione dell'indice della politropica (c_v e c_p sono rispettivamente pari a 717 e 1004 J/kgK), se ne ricava il c_x , che risulta pari a:

$$n = \frac{c_x - c_p}{c_x - c_v} \quad \Rightarrow \quad c_x = \frac{n \cdot c_v - c_p}{n - 1} = \frac{1.26 \cdot 717 - 1004}{1.26 - 1} = -386 \text{ J/kgK}$$

Noti c_v e c_x sono immediatamente calcolabili la variazione di energia interna ed il calore scambiato, rispettivamente pari a:

$$\Delta u = c_v \cdot \Delta T = 717 \cdot (150 - 30) = 86012 \text{ J/kg}$$

$$q = c_x \cdot \Delta T = -386 \cdot (150 - 30) = -46314 \text{ J/kg}$$

Il lavoro scambiato si ricava dal primo principio per sistemi chiusi:

$$l = q - \Delta u = -46314 - 86012 = -132326 \text{ J/kg}$$

2. una trasformazione isoterma, durante la quale $\Delta u = 0$ e dunque, dal primo principio, il lavoro scambiato risulta:

$$l = q = T \cdot \Delta s = -T \cdot R^* \cdot \ln(p_f/p_i) = -423.15 \cdot 8314.5/29 \cdot \ln(1/5) = 195257 \text{ J/kg}$$

3. una trasformazione isobara durante la quale il calore scambiato è pari a:

$$q = \Delta h = c_p \cdot (T_f - T_i) = 1004 \cdot (30 - 150) = -120417 \text{ J/kg}$$

mentre il lavoro scambiato è pari a:

$$l = p \cdot (v_f - v_i) = p \cdot (R^* \cdot T_f/p - R^* \cdot T_i/p) = R^* \cdot (T_f - T_i) = 8314.5/29 \cdot (30 - 150) = -34405 \text{ J/kg}$$

Il lavoro netto l_n scambiato dal ciclo è ovviamente pari alla somma algebrica dei lavori scambiati durante le tre trasformazioni, e risulta: $l_n = 28526 \text{ J/kg}$

Il calore in ingresso al ciclo q_h è solo quello ricevuto durante la trasformazione isoterma (durante le altre trasformazioni il calore viene ceduto), pertanto il rendimento di primo principio è:

$$\eta_I = l_n/q_h = 28526/195257 = 0.146$$

mentre il rendimento di secondo principio è pari a:

$$\eta_{II} = \eta_I/\eta_{rev} = \eta_I/(1 - T_c/T_h) = 0.146/(1 - 288.15/1123.15) = 0.196$$

Il lavoro perso o energia utilizzabile non utilizzata può essere infine calcolato come la differenza tra il lavoro prodotto dal ciclo reversibile (a pari q_h in ingresso) ed il lavoro netto del ciclo, pertanto:

$$l_p = l_{rev} - l_n = \eta_{rev} \cdot q_h - l_n = 0.743 \cdot 195257 - 28526 = 116550 \text{ J/kg}$$

Esercizio 8.11

Argomento: Ciclo Joule a vapore d'acqua

Calcolare, approssimando il fluido di lavoro a gas perfetto o con l'ausilio delle tabelle e/o dei diagrammi dell'acqua, il valore degli scambi energetici per unità di massa del fluido di lavoro ed i rendimenti di primo e secondo principio di un ciclo Joule ideale a vapore d'acqua, che funzioni tra le pressioni $p_{23} = p_{max} = 5 \text{ bar}$ e $p_{14} = p_{min} = 1 \text{ bar}$ e tra le temperature $T_3 = T_h = 700 \text{ °C}$ e $T_1 = T_c = 200 \text{ °C}$.

SOLUZIONE:

Con l'ipotesi di gas perfetto si devono calcolare prima di tutto le temperature di fine compressione e di fine espansione:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \text{e} \quad T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

dove: $\gamma = c_p/c_v$

Il calore per unità di massa entrante nel ciclo è: $q_h = h_3 - h_2 = c_p \cdot (T_3 - T_2)$

mentre quello scaricato in ambiente: $q_c = h_4 - h_1 = c_p \cdot (T_4 - T_1)$

Il lavoro prodotto dalla turbina è: $l_t = h_4 - h_3 = c_p \cdot (T_4 - T_3)$

mentre quello assorbito dal compressore: $l_c = h_2 - h_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

I rendimenti di primo e secondo principio sono così definiti:

$$\eta_I = -(l_t + l_c)/q_h = 1 - T_1/T_2 = 1 - T_4/T_3 \quad \text{ed} \quad \eta_{II} = \eta_I/\eta_{rev}$$

dove η_{rev} è il rendimento di un ciclo di Carnot operante tra T_h e T_c : $\eta_{rev} = 1 - T_c/T_h$

Utilizzando invece le tabelle del vapor d'acqua surriscaldato si ricavano direttamente i valori di entalpia (e di entropia che servono per analizzare le due trasformazioni nelle turbomacchine).

- Per il punto 1 si legge il valore in corrispondenza di $p_{14} = p_{min} = 0.1 \text{ MPa}$ e $T_1 = 200 \text{ °C}$.
- Per il punto 2 si conoscono la pressione e l'entropia, che è pari a quella dello stato 1 (noto). Quindi il valore di entalpia del punto 2 si legge in corrispondenza di $p_{23} = p_{max} = 0.5 \text{ Mpa}$ e $s_2 = s_1$.
- Per il punto 3 si legge il valore in corrispondenza di $p_{23} = 0.5 \text{ MPa}$ e $T_3 = 700 \text{ °C}$.
- Per il punto 4 si conoscono la pressione e l'entropia, che è pari a quella dello stato 3 (noto). Quindi il valore di entalpia del punto 4 si legge in corrispondenza di $p_{14} = 0.1 \text{ Mpa}$ e $s_4 = s_3$.

Gli scambi energetici e di lavoro ed i rendimenti di primo e secondo principio sono definiti analogamente a quanto fatto risolvendo il problema con l'ipotesi di gas perfetto.

RISULTATI NUMERICI:

Considerando il vapor d'acqua gas perfetto triatomico: $\gamma = (4 \cdot R^*)/(3 \cdot R^*) = 1.33$

per cui la temperatura di fine compressione è: $T_2 = 473.15 \cdot (5/1)^{0.33/1.33} = 705.39 \text{ K}$

mentre quella di fine espansione risulta: $T_4 = 973.15 \cdot (1/5)^{0.33/1.33} = 652.76 \text{ K}$

Quindi gli scambi energetici e di lavoro del ciclo sono:

$$\begin{aligned} q_h &= 4 \cdot (8314/18) \cdot (973.15 - 705.39) = 494.7 \text{ kJ/kg} && \text{entrante} \\ q_c &= 4 \cdot (8314/18) \cdot (473.15 - 652.76) = -331.8 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\ l_t &= 4 \cdot (8314/18) \cdot (652.76 - 973.15) = -591.9 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\ l_c &= 4 \cdot (8314/18) \cdot (705.39 - 473.15) = 429.1 \text{ kJ/kg} && \text{entrante} \end{aligned}$$

Il rendimento di primo principio risulta quindi: $\eta_I = (591.9 - 429.1)/494.7 = 0.329$

Il rendimento di un ciclo di Carnot operante tra T_h e T_c è: $\eta_{rev} = 1 - 473.15/973.15 = 0.514$

per cui il rendimento di secondo principio è: $\eta_{II} = 0.329/0.514 = 0.64$

Utilizzando le tabelle dell'acqua invece:

- Per il punto 1: $h_1 = 2875.3 \text{ kJ/kg}$ e $s_1 = 7.8343 \text{ kJ/kgK}$
- Per il punto 2 nella tabella a $p = 0.5 \text{ MPa}$ non è presente il valore di entalpia in corrispondenza di $s = 7.8343 \text{ kJ/kgK}$. Per determinare h_2 occorre interpolare linearmente tra i valori di entropia in cui è compresa s_2 . Risulta quindi:

$$\frac{h_2 - h_{400C}}{h_{500C} - h_{400C}} = \frac{s_2 - s_{400C}}{s_{500C} - s_{400C}}$$

$$h_2 = 3271.9 + (3483.9 - 3271.9) \cdot \frac{7.8343 - 7.7938}{8.0873 - 7.7938} = 3301.1 \text{ kJ/kg}$$

- Per il punto 3: $h_3 = 3925.9 \text{ kJ/kg}$ e $s_3 = 8.5952 \text{ kJ/kgK}$
- Per il punto 4 nella tabella a $p = 0.1 \text{ MPa}$ non è presente il valore di entalpia in corrispondenza di $s = 8.5952 \text{ kJ/kgK}$. Per determinare h_4 occorre interpolare linearmente tra i valori di entropia in cui è compresa s_4 . Risulta quindi:

$$h_4 = 3278.2 + (3488.1 - 3278.2) \cdot \frac{8.5952 - 8.5435}{8.8342 - 8.5435} = 3315.5 \text{ kJ/kg}$$

Quindi gli scambi energetici e di lavoro del ciclo sono:

$$\begin{aligned} q_h &= 3925.9 - 3301.1 = 624.8 \text{ kJ/kg} && \text{entrante} \\ q_c &= 2875.3 - 3315.5 = -440.2 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\ l_t &= 3315.5 - 3925.9 = -610.4 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\ l_c &= 3301.1 - 2875.3 = 425.8 \text{ kJ/kg} && \text{entrante} \end{aligned}$$

mentre i rendimenti di primo e secondo principio risultano:

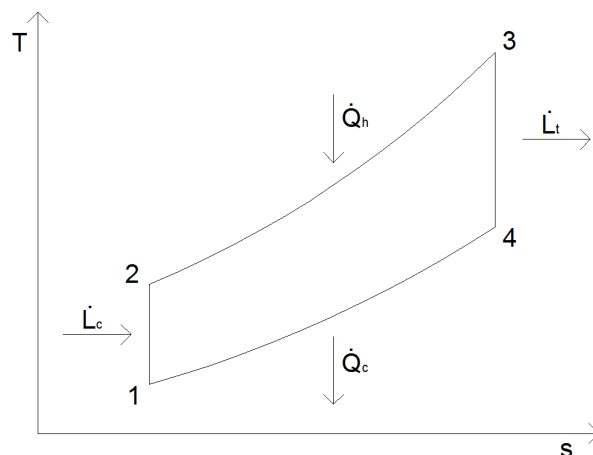
$$\eta_I = (610.4 - 425.8)/624.8 = 0.295 \quad \text{ed} \quad \eta_{II} = 0.295/0.514 = 0.574$$

Esercizio 8.12

Argomento: Ciclo Joule-Brayton

Una centrale termoelettrica operante con un ciclo Joule-Brayton ha una potenza \dot{L}_n di 60 MW. Il fluido di lavoro è aria ($M_M = 28.96 \text{ kg/kmol}$), sono dati $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_3 = 1600 \text{ K}$, $p_1 = 100 \text{ kPa}$, il rapporto di compressione $\beta = p_{max}/p_{min} = 6$. Si richiede di:

1. determinare il rendimento del ciclo e la portata di aria
2. determinare il rendimento del ciclo nel caso in cui la turbina avesse un rendimento isoentropico pari a 0.8
3. determinare il rendimento del ciclo nel caso in cui venisse aggiunto un rigeneratore ideale (considerare nuovamente un rendimento isoentropico della turbina unitario)



SOLUZIONE:

Per risolvere il ciclo occorre determinare i valori di temperatura di tutti i punti:

1. I valori di pressione e temperatura del punto 1 sono dati.
2. La pressione del punto 2 si ricava dalla definizione del rapporto di compressione:

$$\beta = p_{max}/p_{min} = p_2/p_1 \quad \implies \quad p_2 = \beta \cdot p_1$$

La trasformazione 1-2 è una compressione isoentropica, per cui dalla relazione dell'isoentropica in pressione e temperatura si ricava la temperatura del punto 2:

$$T_2 = T_1 \cdot (p_1/p_2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

dove $\gamma = c_p/c_v$. Per l'aria, considerata gas perfetto biatomico: $\gamma = (7/2 \cdot R)/(5/2 \cdot R)$.

3. La temperatura del punto 3 è data, mentre la pressione è la stessa del punto 2.
4. La pressione del punto 4 è la medesima di quella del punto 1. La trasformazione 3-4 è un'espansione isoentropica, per cui dalla relazione dell'isoentropica in pressione e temperatura si ricava la temperatura del punto 4:

$$T_4 = T_3 \cdot (p_3/p_4)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Il calore per unità di massa entrante nel ciclo è pari a: $q_h = c_p \cdot (T_3 - T_2)$

mentre quello scaricato in ambiente è: $q_c = c_p \cdot (T_4 - T_1)$

Il lavoro netto prodotto dal ciclo risulta dunque: $l_n = l_t + l_c = -q_h - q_c$

da cui il rendimento del ciclo: $\eta = -l_n/q_h$

La portata di aria è quindi pari a: $\dot{M} = \dot{L}_n/l_n$

Invece, nel caso di turbina con rendimento isoentropico inferiore a 1, dalla definizione di rendimento isoentropico è possibile ricavare la nuova temperatura di fine espansione $T_{4'}$:

$$\eta_{is} = \frac{l_{reale}}{l_{ideale}} = \frac{c_p \cdot (T_{4'} - T_3)}{T_4 - T_3} \quad \implies \quad T_{4'} = T_3 - \eta_{is} \cdot (T_3 - T_4)$$

Per cui il calore scaricato in ambiente risulta: $q_c = c_p \cdot (T_1 - T_{4'})$

Analogamente al caso di espansione isoentropica, noti il calore entrante nel ciclo e quello scaricato in ambiente, si determinano il lavoro netto prodotto ed il rendimento del ciclo.

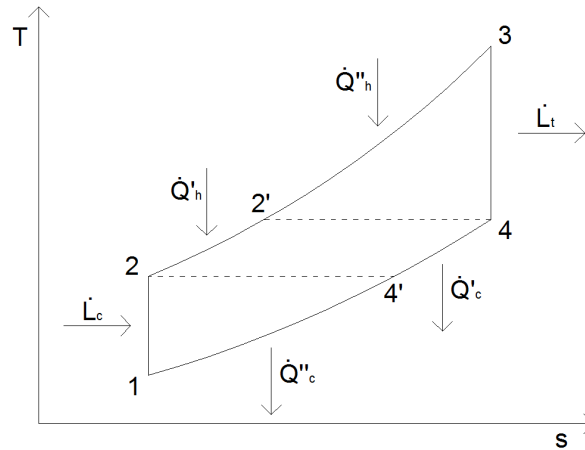
Il rigeneratore è un componente aggiuntivo del ciclo, in cui si ha scambio di calore tra il fluido che evolve tra 4 e 4', e quello che evolve tra 2 e 2'. Al posto di scaricare \dot{Q}'_c in atmosfera, lo si utilizza per riscaldare tra 2 e 2', evitando così di fornire \dot{Q}'_h .

È quindi possibile suddividere la fase sia la fase di riscaldamento 2-3, che quella di raffreddamento 4-1 in due parti:

$$\dot{Q}_h = \dot{Q}'_h + \dot{Q}''_h \quad \text{e} \quad \dot{Q}_c = \dot{Q}'_c + \dot{Q}''_c$$

Nel caso di rigeneratore ideale, ovvero di scambiatore di superficie infinita che permette che tutto il \dot{Q}'_c venga trasferito all'aria in uscita dal compressore, si ha che:

$$\dot{Q}'_c = \dot{Q}'_h$$



Per cui il lavoro per unità di massa entrante nel ciclo è pari a: $q_h'' = c_p \cdot (T_3 - T_{2'}) = c_p \cdot (T_3 - T_4)$

mentre quello scaricato in ambiente: $q_c'' = c_p \cdot (T_1 - T_{4'}) = -c_p \cdot (T_2 - T_1)$

da cui, analogamente ai casi precedenti: $l_n = -q_h'' - q_c''$ e $\eta = -l_n/q_h''$

RISULTATI NUMERICI:

La pressione e la temperatura del punto 2 sono rispettivamente pari a:

$$p_2 = 6 \cdot 100 = 600 \text{ kPa} \quad \text{e} \quad T_2 = 300 \cdot (1/6)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = 500 \text{ K}$$

mentre la temperatura del punto fine espansione risulta:

$$T_4 = 1600 \cdot (6/1)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = 959 \text{ K}$$

Il calore per unità di massa entrante nel ciclo, quello scaricato in ambiente e il lavoro netto prodotto sono rispettivamente:

$$q_h = 7/2 \cdot 8314/28.96 \cdot (1600 - 500) = 1.1053 \text{ MJ/kg}$$

$$q_c = 7/2 \cdot 8314/28.96 \cdot (300 - 959) = -0.6622 \text{ MJ/kg}$$

$$l_n = -1.1053 + 0.6622 = -0.4431 \text{ MJ/kg}$$

Il rendimento del ciclo risulta quindi: $\eta = 0.4431/1.1053 = 0.4$

mentre la portata di aria è pari a: $\dot{M} = 60/0.4431 = 135 \text{ Kg/s}$

Nel caso di turbina con rendimento isoentropico pari a 0.8, la temperatura di fine espansione diventa:

$$T_{4'} = 1600 - 0.8 \cdot (1600 - 959) = 1087 \text{ K}$$

da cui si ricavano il calore scaricato in ambiente, il lavoro netto prodotto ed il rendimento del ciclo, rispettivamente pari a:

$$q_c = 7/2 \cdot 8314/28.96 \cdot (300 - 1087) = -0.7908 \text{ MJ/kg}$$

$$l_n = -1.1053 + 0.7908 = -0.3145 \text{ MJ/kg}$$

$$\eta = 0.3145/1.1053 = 0.28$$

Nel caso invece di ciclo rigenerativo con espansione isoentropica, gli scambi energetici per unità di massa ed il rendimento del ciclo sono pari a:

$$q_h'' = 7/2 \cdot 8314/28.96 \cdot (1600 - 959) = 0.6441 \text{ MJ/kg}$$

$$q_c'' = 7/2 \cdot 8314/28.96 \cdot (300 - 500) = -0.2009 \text{ MJ/kg}$$

$$l_n = -0.6441 + 0.2009 = -0.4432 \text{ MJ/kg}$$

$$\eta = 0.4432/0.6441 = 0.688$$

OSSERVAZIONI:

Nel caso di ciclo rigenerativo, la presenza del rigeneratore non influenza il lavoro netto che si ricava all'asse della turbina.

Nella realtà non si ha uno scambiatore di superficie infinita, quindi non si riesce a riscaldare il fluido fino a $T_{2'} = T_4$, ma solo fino a $T_{2''} < T_{2'}$.

Il calore rigenerato idealmente è pari a: $q'_{h,id} = c_p \cdot (T_{2'} - T_2)$

mentre quello che si riesce a recuperare effettivamente è: $q'_{h,re} = c_p \cdot (T_{2''} - T_2)$

da cui si definisce l'efficienza del rigeneratore: $\varepsilon_{rig} = \frac{q'_{h,re}}{q'_{h,id}} = \frac{T_{2''} - T_2}{T_{2'} - T_2}$

Esercizio 8.13

Argomento: Turboreattore

Un motore di un aeroplano jet opera con un ciclo Joule-Brayton processando aria secca (considerando i gas combusti uguali alla sola aria). L'aria in ingresso è in condizioni atmosferiche ($T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$). Il rapporto di compressione è $\beta = 15$ e la temperatura massima del ciclo è $T_3 = 1573 \text{ K}$. Determinare la velocità di uscita dell'aria dall'ugello di scarico del motore.

SOLUZIONE:

Il principio di funzionamento del motore jet prevede che la turbina fornisca il solo lavoro necessario alla movimentazione del compressore, ed il restante contenuto entalpico del fluido di lavoro venga convertito in energia cinetica nell'ugello di scarico.

E' pertanto necessario innanzi tutto calcolare le condizioni del fluido all'uscita dal compressore (T_2) e dall'ugello di scarico (T_4). Nelle "solite" ipotesi di gas perfetto, turbomacchine e ugello adiabatici e ideali, ecc. si ha quindi:

$$T_2 = T_1 \cdot (p_1/p_2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \cdot \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_4 = T_3 \cdot (p_3/p_4)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \cdot \beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

E' così possibile determinare (oltreché direttamente il rendimento del ciclo $\eta_I = 1 - T_1/T_2 = 1 - T_4/T_3$) gli scambi energetici.

Il lavoro richiesto dal compressore è $l_c = c_p \cdot (T_2 - T_1)$.

Nell'ipotesi che la meccanica (trasmissione, ecc.) sia ideale, questo è esattamente il lavoro richiesto alla turbina.

Il lavoro complessivamente disponibile è pari a

$$l_c + l_t + \Delta h_{ugello} = -q_h - q_c = -c_p \cdot (T_3 - T_2) - c_p \cdot (T_1 - T_4) = c_p \cdot (T_4 - T_3) + c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

e dato che $l_c + l_t = 0$ rimane solo Δh_{ugello} che è convertibile in $\Delta w^2/2$ secondo la consueta relazione:

$$h_i + \frac{w_i^2}{2} = h_u + \frac{w_u^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{w_i^2 - w_u^2}{2}$$

Se si ipotizza che la velocità di uscita dalla turbina e ingresso nell'ugello sia trascurabile rispetto a quella di uscita dallo stesso, quest'ultima può essere immediatamente calcolata come:

$$w_u = \sqrt{-2 \Delta h} = \sqrt{2 c_P \cdot (T_1 + T_3 - T_2 - T_4)}$$

che può essere confrontata con la velocità del suono nel mezzo, pari a $c = \sqrt{\gamma R^* T}$ nell'ipotesi di gas ideale, calcolando il corrispondente numero di Mach $M = w/c$.

RISULTATI NUMERICI:

$$c_P = 7/2 R^* \approx 1 \text{ kJ/kgK}$$

$$\gamma = c_P/c_V \text{ per molecole biatomiche} = 1.4$$

$$T_2 = 636 \text{ K}$$

$$T_4 = 725 \text{ K}$$

$$\eta_I = 0.54$$

$$w_u = 1005 \text{ m/s}$$

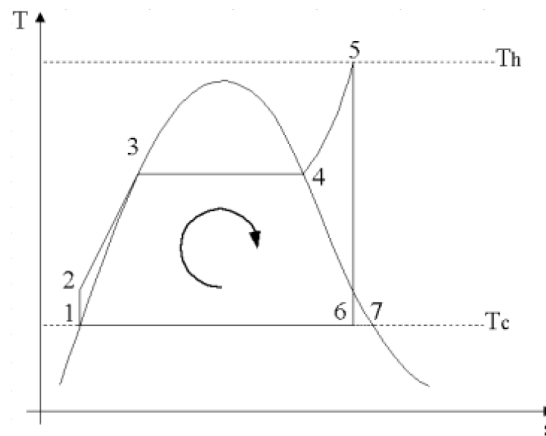
$$c = 540 \text{ m/s}$$

$$M = 1.86$$

Esercizio 8.14

Argomento: Ciclo Rankine diretto

Calcolare, con l'ausilio delle tabelle e/o dei diagrammi dell'acqua, il valore degli scambi energetici per unità di massa del fluido di lavoro ed i rendimenti di primo e secondo principio di un ciclo Rankine diretto a vapor d'acqua che funzioni tra le temperature $T_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_3 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$, nell'ipotesi di assenza di qualsiasi fenomeno dissipativo (η_{turbina} ed η_{pompa} unitari) e di scambiatori di calore ideali, e considerando per semplicità un solo surriscaldamento a temperatura $T_5 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$. Se il ciclo descritto dovesse fornire una potenza \dot{L} di 125 MW, che portata di fluido di lavoro sarebbe necessaria?



SOLUZIONE:

Per determinare completamente il ciclo occorre determinare i valori di temperatura T , pressione p , volume specifico v , entalpia h , entropia s e titolo x di tutti i punti del ciclo. Non sono tutti necessari per rispondere alle domande proposte dal testo dell'esercizio, ma verranno comunque qui calcolati tutti per completezza.

- Il punto 1 è in condizioni di liquido saturo ed è nota la temperatura: quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_1 = 15 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_1, v_1, h_1 ed s_1 .
- Il punto 3 è in condizioni di liquido saturo ed è nota la temperatura: quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_3 = 300 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_3, v_3, h_3 ed s_3 .
- Il punto 2 è in condizioni di liquido sottoraffreddato. La pressione è uguale a quella del punto 3 ($p_2 = p_3$) e l'entropia è uguale a quella del punto 1 ($s_2 = s_1$). Inoltre si può approssimare che sia la temperatura che il volume specifico siano uguali a quelli del punto iniziale ($T_2 \cong T_1$ e $v_2 \cong v_1$). Per cui si può calcolare il lavoro specifico assorbito dalla pompa, pari a: $l_p = v_1 \cdot (p_2 - p_1)$ tale lavoro è inoltre uguale a: $l_p = h_2 - h_1$ e quindi si ricava l'entalpia nel punto 2: $h_2 = l_p + h_1$
- Il punto 4 è in condizioni di vapore saturo ed la temperatura è uguale a quella del punto 3 ($T_4 = T_3$): quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_4 = 300 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_4, v_4, h_4 ed s_4 .
- Il punto 5 è in condizioni di vapore surriscaldato, la temperatura è nota e la pressione è uguale a quella del punto 4 ($p_5 = p_4$): quindi dalla tabella dell'acqua surriscaldata in corrispondenza di $T_5 = 500 \text{ °C}$ e $p_5 = 8.581 \text{ MPa}$ si ricavano i valori v_5, h_5 ed s_5 . Solitamente le tabelle dell'acqua surriscaldata sono fornite per i valori di pressione $p = 8 \text{ MPa}$ e $p = 9 \text{ MPa}$, quindi per ricavare v_5, h_5 ed s_5 occorre fare un'interpolazione lineare tra i corrispondenti valori a 500 °C .
- Il punto 7 è in condizioni di vapore saturo ed la temperatura è uguale a quella del punto 1 ($T_7 = T_1$): quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_7 = 15 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_7, v_7, h_7 ed s_7 .
- Il punto 6 è nella zona di coesistenza di liquido e vapore e sono note temperatura ($T_6 = T_1$), pressione ($p_6 = p_1$) ed entropia ($s_6 = s_5$). Nota l'entropia della miscela e quella nelle condizioni di liquido saturo s_1 e di vapore saturo s_7 , è possibile calcolare il titolo della miscela:

$$x_6 = (s_6 - s_1)/(s_7 - s_1)$$

Quindi volume specifico ed entalpia del punto 6 si possono valutare con la regola della leva tra le le condizioni di liquido e vapore saturo:

$$v_6 = (1 - x_6) \cdot v_1 + x_6 \cdot v_7 \quad \text{e} \quad h_6 = (1 - x_6) \cdot h_1 + x_6 \cdot h_7$$

Il calore per unità di massa entrante nel ciclo è: $q_h = h_5 - h_2$

mentre quello scaricato in ambiente: $q_c = h_1 - h_6$

Il lavoro prodotto dalla turbina è: $l_t = h_6 - h_5$

mentre quello assorbito dalla pompa: $l_p = h_2 - h_1$

I rendimenti di primo e secondo principio sono così definiti: $\eta_I = -(l_t + l_p)/q_h$ ed $\eta_{II} = \eta_I/\eta_{rev}$

dove η_{rev} è il rendimento di un ciclo di Carnot operante tra T_5 e T_1 : $\eta_{rev} = 1 - T_1/T_5$

La portata di fluido necessaria per fornire la potenza \dot{L} è pari a: $\dot{M} = \dot{L}/(l_t + l_p)$

RISULTATI NUMERICI:

I valori di temperatura T , pressione p , volume specifico v , entalpia h , entropia s e titolo x di tutti i punti del ciclo sono riportati in tabella:

Punto	$T [K]$	$p [kPa]$	$v [m^3/kg]$	$h [kJ/kg]$	$s [kJ/kgK]$	$x [-]$
1	288.15	1.7051	0.001001	62.99	0.2245	0
2	288.15	8581	0.001001	71.58	0.2245	0
3	573.15	8581	0.001404	1344.0	3.2534	0
4	573.15	8581	0.02167	2749.0	5.7045	1
5	773.15	8581	0.03871	3392.31	6.687	1
6	288.15	1.7051	58.82	1925.07	6.687	0.755
7	288.15	1.7051	77.93	2528.9	8.7814	1

Gli scambi energetici e di lavoro del ciclo sono:

$$\begin{aligned}
 q_h &= 3392.31 - 71.58 = 3320.73 \text{ kJ/kg} && \text{entrante} \\
 q_c &= 62.99 - 1925.07 = -1862.08 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\
 l_t &= 1925.07 - 3392.31 = -1467.24 \text{ kJ/kg} && \text{uscente} \\
 l_p &= 71.58 - 62.99 = 8.59 \text{ kJ/kg} && \text{entrante}
 \end{aligned}$$

Il rendimento di primo principio risulta quindi: $\eta_I = (1467.24 - 8.59)/3320.73 = 0.439$

Il rendimento di un ciclo di Carnot operante tra T_5 e T_1 è: $\eta_{rev} = 1 - 288.15/773.15 = 0.627$

per cui il rendimento di secondo principio è: $\eta_{II} = 0.439/0.627 = 0.700$

La portata di fluido necessaria per fornire \dot{L} risulta: $\dot{M} = -125000/(-1467.24 + 8.59) = 85.67 \text{ kg/s}$

Esercizio 8.15

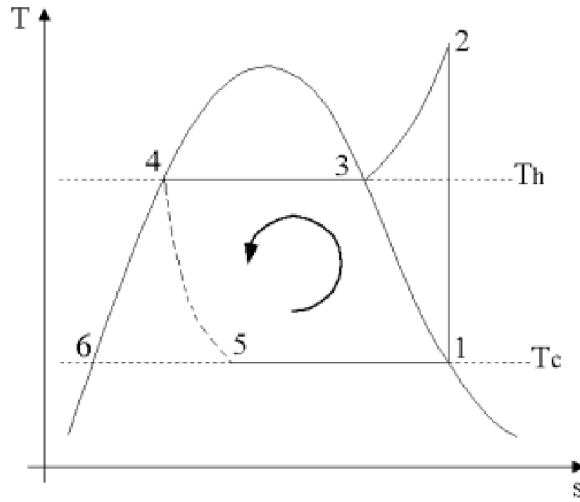
Argomento: Ciclo Rankine inverso

Calcolare, con l'ausilio delle tabelle e/o dei diagrammi dell'acqua, il valore degli scambi energetici per unità di massa del fluido di lavoro ed i rendimenti di primo e secondo principio di un ciclo Rankine inverso a vapor d'acqua che funzioni tra le temperature $T_1 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_3 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ (si ipotizzino compressore e scambiatori di calore ideali), nel caso venga utilizzato come frigorifero e nel caso venga utilizzato come pompa di calore.

SOLUZIONE:

Per risolvere il ciclo occorre determinare i valori di temperatura T , pressione p , volume specifico v , entalpia h , entropia s e titolo x di tutti i punti del ciclo.

- Il punto 1 è in condizioni di vapore saturo ed è nota la temperatura: quindi dalla tabella dell'acqua satura in corrispondenza di $T_1 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ si ricavano i valori p_1 , v_1 , h_1 ed s_1 .
- Il punto 3 è in condizioni di vapore saturo ed è nota la temperatura: quindi dalla tabella dell'acqua satura in corrispondenza di $T_3 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ si ricavano i valori p_3 , v_3 , h_3 ed s_3 .



- Il punto 2 è in condizioni di vapore surriscaldato, la pressione è uguale a quella del punto 3 ($p_2 = p_3$) mentre l'entropia è uguale a quella del punto 2 ($s_2 = s_1$): quindi dalla tabella dell'acqua surriscaldata in corrispondenza di $p_2 = 0.012349 \text{ MPa}$ ed $s_2 = 9.0257 \text{ kJ/kgK}$ si ricavano i valori T_2 , v_2 ed h_2 . Dato che i valori non sono tabulati né a p_2 , né ad s_2 , occorre fare una doppia interpolazione lineare.

Si riporta solo il calcolo dell'entalpia h_2 perchè analogo a quello di T_2 e v_2 . Si valutano le entalpie a 0.01 MPa e a 0.05 MPa interpolando tra i valori di entropia in cui è compresa s_2 :

$$\frac{h_{2,0.01} - 2879.5}{2977.3 - 2879.5} = \frac{s_2 - 8.9038}{9.1002 - 8.9038} \quad \text{e} \quad \frac{h_{2,0.05} - 3278.9}{3488.7 - 3278.9} = \frac{s_2 - 8.8642}{9.1546 - 8.8642}$$

Noti i valori di $h_{2,0.01}$ ed $h_{2,0.05}$ si interpolano con la pressione per ottenere h_2 :

$$\frac{h_2 - h_{2,0.01}}{h_{2,0.05} - h_{2,0.01}} = \frac{p_2 - 0.01}{0.05 - 0.01}$$

- Il punto 4 è in condizioni di liquido saturo e la temperatura è uguale a quella del punto 3 ($T_4 = T_3$): quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_4 = 50 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_4 , v_4 , h_4 ed s_4 .
- Il punto 6 è in condizioni di liquido saturo e la temperatura è uguale a quella del punto 1 ($T_6 = T_1$): quindi dalla tabella dell'acqua saturo in corrispondenza di $T_6 = 5 \text{ °C}$ si ricavano i valori p_6 , v_6 , h_6 ed s_6 .
- Il punto 5 è nella zona di coesistenza di liquido e vapore e sono note temperatura ($T_5 = T_1$), pressione ($p_5 = p_1$) ed entalpia ($h_5 = h_4$, laminazione isoentalpica). Nota l'entalpia della miscela e quella nelle condizioni di liquido saturo h_6 e di vapore saturo h_1 , è possibile calcolare il titolo della miscela:

$$x_5 = (h_5 - h_6)/(h_1 - h_6)$$

Quindi volume specifico ed entropia del punto 5 si possono valutare con la regola della leva tra le condizioni di liquido e vapore saturo:

$$v_5 = (1 - x_5) \cdot v_6 + x_5 \cdot v_1 \quad \text{e} \quad s_5 = (1 - x_5) \cdot s_6 + x_5 \cdot s_1$$

Il calore per unità di massa sottratto alla sorgente fredda è: $q_c = h_1 - h_5$

mentre quello ceduto alla sorgente calda è: $q_h = h_4 - h_2$

Il lavoro assorbito dal compressore è pari a: $l_c = h_2 - h_1$

Se il ciclo viene utilizzato come frigorifero l'effetto utile è il calore sottratto dalla sorgente fredda, per cui l'efficienza è: $\varepsilon_f = q_c/l_c$

quella reversibile di un ciclo operante tra T_h e T_c è: $\varepsilon_{f,rev} = T_c/(T_h - T_c)$

e quindi il rendimento di secondo principio risulta: $\eta_{II,f} = \varepsilon_f/\varepsilon_{f,rev}$

Se il ciclo viene utilizzato come pompa di calore l'effetto utile è il calore ceduto dalla sorgente calda, per cui il COP è: $COP = -q_h/l_c$

quello reversibile di un ciclo operante tra T_h e T_c è: $COP_{rev} = T_h/(T_h - T_c)$

e quindi il rendimento di secondo principio risulta: $\eta_{II,PdC} = COP/COP_{rev}$

RISULTATI NUMERICI:

I valori di temperatura T , pressione p , volume specifico v , entalpia h , entropia s e titolo x di tutti i punti del ciclo sono riportati in tabella:

Punto	T [K]	p [kPa]	v [m ³ /kg]	h [kJ/kg]	s [kJ/kgK]	x [-]
1	278.15	0.8721	147.12	2510.6	9.0257	1
2	529.15	12.349	19.61	2966.9	9.0257	1
3	323.15	12.349	12.03	2592.1	8.0763	1
4	323.15	12.349	0.001012	209.33	0.7038	0
5	278.15	0.8721	11.18	209.33	0.7563	0.076
6	278.15	0.8721	0.001000	20.98	0.0761	0

Gli scambi energetici e di lavoro del ciclo sono:

$$q_c = 2510.6 - 209.33 = 2301.27 \text{ kJ/kg} \quad \text{entrante}$$

$$q_h = 209.33 - 2966.9 = -2757.57 \text{ kJ/kg} \quad \text{uscente}$$

$$l_c = 2966.9 - 2510.6 = 456.3 \text{ kJ/kg} \quad \text{entrante}$$

Se il ciclo viene utilizzato come frigorifero l'efficienza è: $\varepsilon_f = 2301.27/456.3 = 5.04$

quella reversibile è: $\varepsilon_{f,rev} = 278.15/(323.15 - 278.15) = 6.18$

e quindi il rendimento di secondo principio risulta: $\eta_{II,f} = 5.04/6.18 = 0.81$

Se il ciclo viene utilizzato come pompa di calore il COP è: $COP = 2757.57/456.3 = 6.04$

quello reversibile è: $COP_{rev} = 323.15/(323.15 - 278.15) = 7.18$

e quindi il rendimento di secondo principio risulta: $\eta_{II,PdC} = 6.04/7.18 = 0.84$

Esercizio 8.16

Argomento: *Ciclo termogravimetrico diretto*

Un particolare ciclo termodinamico motore opera secondo la seguente successione di trasformazioni:

- compressione isoentropica in fase liquida 1-2 ($t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_1 = 220 \text{ kJ/kg}$, $c_p \text{ liquido} = 1.61 \text{ kJ/kgK}$)
- riscaldamento isobaro 2-3 ($t_3 = 90 \text{ }^\circ\text{C}$, $s_3 = 1.44 \text{ kJ/kgK}$)
- evaporazione isothermobarica 3-4 ($\lambda_{\text{evap}} = 83 \text{ kJ/kg}$)
- espansione isoterma 4-5 ($s_5 = 1.94 \text{ kJ/kgK}$, $h_5 = 479 \text{ kJ/kg}$)
- raffreddamento isobaro 5-6 in cui il punto 6 è il punto di vapore saturo secco a t_1 ($t_6 = t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$)
- condensazione isothermobarica 6-1 ($\lambda_{\text{evap}} = -187 \text{ kJ/kg}$)

Trascurando gli effetti della compressione in fase liquida ($\Delta T = 0$, $L = 0$) e supponendo che la sorgente calda si trovi alla temperatura (costante) $t_H = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ e che il pozzo freddo sia costituito da ghiaccio fondente alla temperatura $t_C = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\lambda_{\text{fus}} \text{ ghiaccio} = 334 \text{ kJ/kg}$):

1. rappresentare il ciclo nel piano $T - s$;
2. determinare i rendimenti di primo e secondo principio;
3. determinare le irreversibilità di ciascuna delle trasformazioni termodinamiche associate all'introduzione del calore Q_H .

SOLUZIONE:

%DATI

```
T1=288.15;  
h1=220e3;  
cp1=1610;  
T3=363.15;  
s3=1440;  
lambda_evap=83e3;  
s5=1940;  
h5=479e3;  
lambda_cond=-187e3;  
T6=T1;
```

```
Th=373.15;
```

```
Tc=273.15;
```

%SOLUZIONE

%calcolo del rendimento di Carnot reversibile equivalente

```
nCR=1-Tc/Th;
```

%calcolo del calore ceduto durante la condensazione

```
Qccond=lambda_cond;
```


%calcolo del calore ceduto durante il raffreddamento isobaro

$$h6=h1-\lambda_{cond};$$

$$Qc56=h6-h5;$$

%calcolo del Qc totale

$$Qctot=Qccond+Qc56;$$

%calcolo del Qh totale

$$Qh23=cpl*(T3-T1);$$

$$Qh34=\lambda_{evap};$$

$$s4=s3+\lambda_{evap}/T3;$$

$$Qh45=T3*(s5-s4);$$

$$Qhtot=Qh23+Qh34+Qh45;$$

%calcolo dei rendimenti di primo e secondo principio

$$nI=1+Qctot/Qhtot;$$

$$nII=nI/nCR;$$

%calcolo delle irreversibilit 

$$Ds23=cpl*\log(T3/T1)-Qh23/Th;$$

$$Ds34=\lambda_{evap}/T3-\lambda_{evap}/Th;$$

$$Ds45=Qh45/T3-Qh45/Th;$$

RISULTATI NUMERICI:

<i>Ds23</i>	48.852610	<i>Ds34</i>	6.125035	<i>Ds45</i>	7.274402	<i>Qc56</i>	-72000.000000
<i>Qccond</i>	-187000.000000	<i>Qctot</i>	-259000.000000	<i>Qh23</i>	120750.000000	<i>Qh34</i>	83000.000000
<i>Qh45</i>	98575.000000	<i>Qhtot</i>	302325.000000	<i>T1</i>	288.150000	<i>T3</i>	363.150000
<i>T6</i>	288.150000	<i>Tc</i>	273.150000	<i>Th</i>	373.150000	<i>cpl</i>	1610.000000
<i>h1</i>	220000.000000	<i>h5</i>	479000.000000	<i>h6</i>	407000.000000	<i>λ_{cond}</i>	-187000.000000
<i>λ_{evap}</i>	83000.000000	<i>nCR</i>	0.267989	<i>nI</i>	0.143306	<i>nII</i>	0.534747
<i>s3</i>	1440.000000	<i>s4</i>	1668.555693	<i>s5</i>	1940.000000		

Trasmissione del Calore

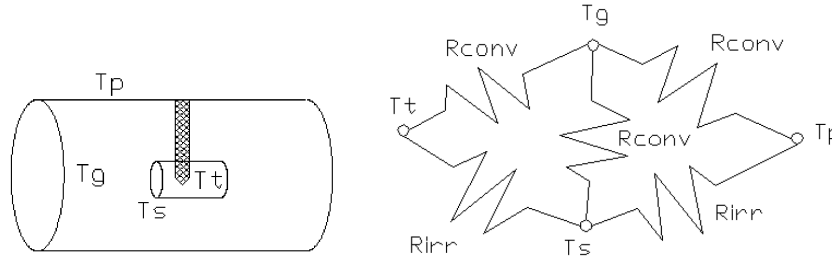
Tabella della conduttività termica e viscosità dinamica dell'aria a pressione atmosferica

Temperature (K)	Pressure (MPa)	Therm. Cond. (mW/m-K)	Viscosity ($\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$)	Temperature (K)	Pressure (MPa)	Therm. Cond. (mW/m-K)	Viscosity ($\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$)
233.00	0.10000	21.212	15.144	348.00	0.10000	29.862	20.777
238.00	0.10000	21.613	15.409	353.00	0.10000	30.214	21.002
243.00	0.10000	22.011	15.673	358.00	0.10000	30.566	21.226
248.00	0.10000	22.406	15.934	363.00	0.10000	30.915	21.449
253.00	0.10000	22.799	16.193	368.00	0.10000	31.263	21.670
258.00	0.10000	23.190	16.451	373.00	0.10000	31.609	21.890
263.00	0.10000	23.579	16.706	378.00	0.10000	31.954	22.108
268.00	0.10000	23.965	16.959	383.00	0.10000	32.297	22.326
273.00	0.10000	24.349	17.211	388.00	0.10000	32.639	22.542
278.00	0.10000	24.730	17.460	393.00	0.10000	32.979	22.757
283.00	0.10000	25.110	17.708	398.00	0.10000	33.318	22.970
288.00	0.10000	25.487	17.954	403.00	0.10000	33.655	23.183
293.00	0.10000	25.862	18.198	408.00	0.10000	33.991	23.394
298.00	0.10000	26.235	18.441	413.00	0.10000	34.326	23.604
303.00	0.10000	26.607	18.681	418.00	0.10000	34.659	23.813
308.00	0.10000	26.976	18.920	423.00	0.10000	34.990	24.021
313.00	0.10000	27.343	19.158	428.00	0.10000	35.321	24.227
318.00	0.10000	27.708	19.394	433.00	0.10000	35.650	24.433
323.00	0.10000	28.072	19.628	438.00	0.10000	35.978	24.637
328.00	0.10000	28.433	19.861	443.00	0.10000	36.305	24.841
333.00	0.10000	28.793	20.092	448.00	0.10000	36.630	25.043
338.00	0.10000	29.151	20.322	453.00	0.10000	36.954	25.245
343.00	0.10000	29.507	20.550				

Esercizio 9.1

Argomento: Termocoppia schermata / schemi elettrici equivalenti

Determinare lo schema elettrico equivalente per un sistema costituito da una termocoppia schermata inserita in una corrente di gas in moto dentro un condotto.



SOLUZIONE:

Trascurando la conduzione lungo i fili della termocoppia si osserva che:

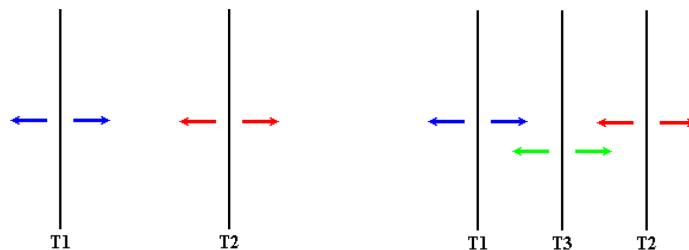
- La termocoppia a temperatura T_t scambia calore con lo schermo a T_s per irraggiamento.
- La termocoppia a temperatura T_t scambia calore con il gas a T_g per convezione.
- Il gas a temperatura T_g scambia calore con lo schermo a T_s per convezione.
- La parete a temperatura T_p scambia calore con il gas a T_g per convezione.
- La parete a temperatura T_p scambia calore con lo schermo a T_s per irraggiamento.

Lo schema elettrico equivalente risulta quello rappresentato a destra nella figura.

Esercizio 9.2

Argomento: Irraggiamento tra pareti piane

Si considerino due pareti piane infinite di spessore nullo, la prima a temperatura costante e uniforme $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\epsilon_1 = 0.4$), la seconda a temperatura costante e uniforme $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\epsilon_2 = 0.7$), immerse nel vuoto. Calcolare la potenza radiativa netta per unità di superficie (flusso areico $\dot{E}'' = \dot{E}/S$) che si scambiano in condizioni stazionarie. Se le due pareti fossero entrambe nere, cosa succederebbe al flusso scambiato? Se poi tra le due pareti (ancora ipotizzate nere) ne viene interposta una terza, anch'essa indefinita e nera, a che temperatura si porta quest'ultima all'equilibrio? Il flusso radiativo netto scambiato risulta differente? Di quanto? Cosa cambierebbe se fossero sfere concentriche invece che piani paralleli?



SOLUZIONE:

Secondo la legge di Stefan-Boltzman la potenza radiativa per unità di superficie emessa da ciascuna faccia di una parete grigia a temperatura T è pari a:

$$\dot{E}'' = \dot{E}/S = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

in cui σ è la costante di Stefan-Boltzman (pari a $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$) ed ϵ è l'emissività (pari a 1 per il corpo nero).

Dunque la parete 1 emette: $\dot{E}_1'' = \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4$

mentre la parete 2 emette: $\dot{E}_2'' = \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4$

Poiché le superfici sono grigie, è necessario considerare anche lo scambio dovuto alle quote parti riflesse da ciascuna parete verso l'altra. Lo scambio netto tra le due pareti è quindi calcolabile secondo la formula generale (valida per superfici indefinite e parallele):

$$\dot{E}_2'' - \dot{E}_1'' = -\frac{\sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Se le due superficie sono approssimate a nere, il fattore correttivo funzione delle emissività risulta unitario e la formula si semplifica:

$$\dot{E}_2'' - \dot{E}_1'' = -\sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

Quando viene interposta una terza parete, ciascuna delle due precedenti scambia solo con quest'ultima e dunque, per mantenere le condizioni di equilibrio (senza che nessuna parete riceva più di quello che cede o viceversa, il che farebbe cambiare il valore delle variabili termodinamiche in ciascun punto del sistema, contro la definizione di condizioni stazionarie) deve essere:

$$\dot{E}_2'' - \dot{E}_3'' = \dot{E}_3'' - \dot{E}_1'' \quad \implies \quad \sigma \cdot (T_2^4 - T_3^4) = \sigma \cdot (T_3^4 - T_1^4)$$

che è un'equazione nell'unica incognita T_3 , da cui: $T_3^4 = (T_1^4 + T_2^4)/2$

La potenza radiativa netta scambiata per unità di superficie è quindi pari a:

$$\dot{E}'' = \sigma \cdot (T_3^4 - T_1^4) = \sigma \cdot (T_2^4 - T_3^4) = \sigma \cdot (T_2^4 - (T_1^4 + T_2^4)/2) = \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)/2$$

Se al posto di piani paralleli ci fossero delle sfere concentriche, la formula generale per lo scambio radiativo tra le 2 è:

$$\dot{E}_{1,2} = -\frac{\sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \cdot A_1} + \frac{1}{A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot A_2}}$$

dato che $F_{1 \rightarrow 2} = 1$ si semplifica in:

$$\dot{E}_{1,2} = -\frac{A_1 \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot A_2/A_1}}$$

se poi $A_2 \gg A_1$, il terzo termine del denominatore tende a 0 (indipendentemente dalla forma effettiva delle superfici, tra l'altro) e si ottiene:

$$\dot{E}_{1,2} \cong -A_1 \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

RISULTATI NUMERICI:

Lo scambio netto per unità di superficie tra le due pareti grigie è:

$$\dot{E}_2'' - \dot{E}_1'' = -5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (373.15^4 - 298.15^4)/(1/0.4 + 1/0.7 - 1) = -222.4 \text{ W/m}^2$$

Se le due pareti fossero entrambe nere, lo scambio netto diventerebbe:

$$\dot{E}_2'' - \dot{E}_1'' = -5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (373.15^4 - 298.15^4) = -651.3 \text{ W/m}^2$$

La temperatura di equilibrio di una terza parete nera interposta tra le due, ancora ipotizzate nere, risulta:

$$T_3 = \sqrt[4]{(298.15^4 + 373.15^4)/2} = 341.78 \text{ K}$$

ed il flusso radiativo netto scambiato:

$$\dot{E}'' = -5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (373.15^4 - 298.15^4)/2 = -325.65 \text{ W/m}^2$$

OSSERVAZIONI:

Provare a replicare l'analisi sullo schermo anti-radiante senza assumere che le pareti siano nere, ma invece considerandole grigie e provando a vedere cosa cambia al variare delle emissività.

Esercizio 9.3

Argomento: Scambio termico e aria umida

L'aria contenuta in una stanza è a $T_{f11} = 20 \text{ °C}$ e $\varphi_{f11} = 50 \%$. Si determinino la sua temperatura di rugiada e a che temperatura deve essere l'aria esterna per avere condensa sulla faccia interna dei vetri (spessore $s = 3 \text{ mm}$) delle finestre ($h_{f11} = 8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$; h_{f12} (aria esterna) = $25 \text{ W/(m}^2\text{K)}$; $k_{vetro} = 0.8 \text{ W/(mK)}$).

SOLUZIONE:

La temperatura di rugiada T_{p1} , che porta a condensa sulla faccia interna del vetro, si ricava dai diagrammi dell'aria umida.

La potenza termica per unità di superficie che l'aria ambiente cede all'esterno è data da:

$$\dot{Q}'' = -h_{f11} \cdot (T_{p1} - T_{f11})$$

ma è anche pari a: $\dot{Q}'' = -(T_{f12} - T_{f11})/(1/h_{f11} + s/k_{vetro} + 1/h_{f12})$

da cui si ricava: $T_{f12} = T_{f11} - \dot{Q}'' \cdot (1/h_{f11} + s/k_{vetro} + 1/h_{f12})$

Si noti che non è possibile avere condensa sulla faccia esterna, perchè la T minima è quella dell'aria esterna, pertanto per poter avere condensa sulla faccia esterna dovrebbe essere $T_{f12} < T_R$.

RISULTATI NUMERICI:

La temperatura di rugiada T_{p1} è pari a 9.27 °C .

La potenza termica per unità di superficie risulta: $\dot{Q}'' = -8 \cdot (9.27 - 20) = 85.84 \text{ W/m}^2$

mentre la temperatura dell'aria esterna è: $T_{f12} = 20 - 85.84 \cdot (1/8 + 0.003/0.8 + 1/25) = 5.51 \text{ °C}$

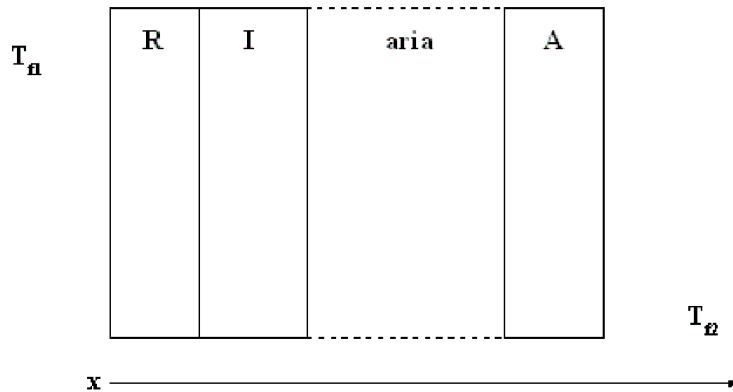
Esercizio 9.4

Argomento: Parete piana

Una parete piana indefinitamente estesa lungo due direzioni spaziali ortogonali è costituita lungo la terza da quattro strati:

1. refrattario: $s_r = 120 \text{ mm}$ $k_r = 3 \text{ W/mK}$
2. isolante: $s_i = 180 \text{ mm}$ $k_i = 0.25 \text{ W/mK}$
3. intercapedine piena d'aria: $s_{ai} = 300 \text{ mm}$ $h_{ai} = 35 \text{ W/m}^2\text{K}$
4. acciaio: $s_a = 150 \text{ mm}$ $k_a = 50 \text{ W/mK}$

ed è lambita su entrambe le facce da aria: da un lato a $T_{f1} = 700 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h_{f1} = 40 \text{ W/m}^2\text{K}$) e dall'altro lato a $T_{f2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h_{f2} = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$). Calcolare il flusso termico areico \dot{Q}'' che attraversa la parete e la temperatura T_3 all'interfaccia tra lo strato di isolante e l'intercapedine piena d'aria. Rappresentare poi qualitativamente (con la massima accuratezza possibile) nella figura il profilo di temperatura $T(x)$ nei fluidi ed all'interno della parete e dell'intercapedine.



SOLUZIONE:

In condizioni stazionarie e in assenza di generazione interna di potenza termica, la potenza termica \dot{Q} che attraversa una parete piana indefinita orientata perpendicolarmente al flusso termico risulta calcolabile da:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \text{cost} \quad \rightarrow \quad T = C_1 x + C_2$$

con le opportune condizioni al contorno si ottiene il profilo $T(x)$, quindi nel caso di temperatura sulle facce imposta:

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}/S = -k/s \cdot (T_{p2} - T_{p1})$$

Nota questa e l'equazione di Newton per lo scambio alle interfacce fluido-parete solida, applicando l'analogia elettrica, il sistema è costituito da 7 resistenze termiche in serie, 4 convettive e 3 conduttive:

$$\dot{Q}'' = -1/R''_{tot} \cdot (T_{f2} - T_{f1})$$

in cui R''_{tot} è la resistenza equivalente totale per unità di superficie:

$$R''_{tot} = \frac{1}{h_{f1}} + \frac{s_r}{k_r} + \frac{s_i}{k_i} + \frac{1}{h_{ai}} + \frac{1}{h_{ai}} + \frac{s_a}{k_a} + \frac{1}{h_{f2}}$$

Si noti come all'interno dell'intercapedine la resistenza convettiva (si ipotizza che si instauri convezione all'interno dell'intercapedine, anche se sarebbe da verificare, o con lo spessore dell'intercapedine o

meglio con $Ra \leq 1000$) deve comparire 2 volte: esiste una resistenza convettiva ogni volta che si ha uno scambio fluido-parete!

Riapplicando le singole equazioni per la convezione o conduzione a ciascuno strato:

$$\begin{aligned}\dot{Q}'' &= -h_{f1} \cdot (T_1 - T_{f1}) & T_1 &= T_{f1} - 1/h_{f1} \cdot \dot{Q}'' \\ \dot{Q}'' &= -k_r/s_r \cdot (T_2 - T_1) & T_2 &= T_1 - s_r/k_r \cdot \dot{Q}'' \\ \dot{Q}'' &= -k_i/s_i \cdot (T_3 - T_2) & T_3 &= T_2 - s_i/k_i \cdot \dot{Q}'' \\ \dot{Q}'' &= -h_{ai} \cdot (T_{ai} - T_3) & T_{ai} &= T_3 - 1/h_{ai} \cdot \dot{Q}'' \\ \dot{Q}'' &= -h_{ai} \cdot (T_4 - T_{ai}) & T_4 &= T_{ai} - 1/h_{ai} \cdot \dot{Q}'' \\ \dot{Q}'' &= -k_a/s_a \cdot (T_5 - T_4) & T_5 &= T_4 - s_a/k_a \cdot \dot{Q}''\end{aligned}$$

Per la rappresentazione del profilo $T(x)$: a pari Q , la pendenza di $T(x)$ all'interno della parete è inversamente proporzionale alla conducibilità termica.

RISULTATI NUMERICI:

La resistenza equivalente totale per unità di superficie è:

$$R''_{tot} = \frac{1}{40} + \frac{0.12}{3} + \frac{0.18}{0.25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \frac{0.15}{50} + \frac{1}{20} = 0.8951 \text{ m}^2\text{K/W}$$

e dunque $\dot{Q}'' = -1/0.8951 \cdot (20 - 700) = 759.66 \text{ W/m}^2$

Le temperature alle interfacce della parete e nell'intercapedine sono:

$$\begin{aligned}T_1 &= 700 - 1/40 \cdot 759.66 = 681.01 \text{ C} \\ T_2 &= 681.01 - 0.12/3 \cdot 759.66 = 650.62 \text{ C} \\ T_3 &= 650.62 - 0.18/0.25 \cdot 759.66 = 103.67 \text{ C} \\ T_{ai} &= 103.67 - 1/35 \cdot 759.66 = 81.97 \text{ C} \\ T_4 &= 81.97 - 1/35 \cdot 759.66 = 60.26 \text{ C} \\ T_5 &= 60.26 - 0.15/50 \cdot 759.66 = 57.98 \text{ C}\end{aligned}$$

Si noti come all'aumentare del coefficiente di scambio termico convettivo diminuisca la differenza di temperatura tra il fluido e la parete.

Esercizio 9.5

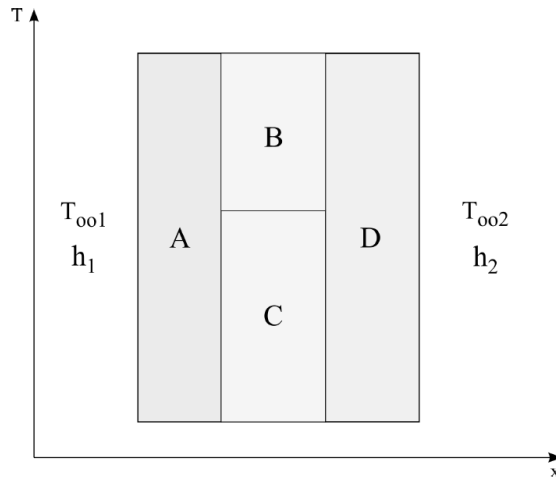
Argomento: Parete piana con elementi in parallelo

Determinare la potenza termica \dot{Q} che attraversa la parete schematizzata in figura, nel caso di:

- *considerare isoterme le superfici ortogonali alla direzione dominante del flusso;*
- *considerare adiabatiche le superfici parallele alla direzione dominante del flusso.*

SOLUZIONE:

Con riferimento all'esempio schematizzato in figura (per i valori numerici si veda la tabella delle soluzioni), si hanno i due scenari seguenti:



- considerando isoterme le superfici ortogonali alla direzione dominante del flusso:

$$\dot{Q}' = - \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{\frac{1}{A_A \cdot h_1} + \frac{s_A}{A_A \cdot k_A} + \frac{1}{\frac{A_B \cdot k_B}{s_B} + \frac{A_C \cdot k_C}{s_C}} + \frac{s_D}{A_D \cdot k_D} + \frac{1}{A_D \cdot h_2}}$$

- considerando adiabatiche le superfici parallele alla direzione dominante del flusso:

$$\dot{Q}' = \dot{Q}'_{ABD} + \dot{Q}'_{ACD} = -A_B \cdot \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{\frac{1}{h_1} + \frac{s_A}{k_A} + \frac{s_B}{k_B} + \frac{s_D}{k_D} + \frac{1}{h_2}} - A_C \cdot \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{\frac{1}{h_1} + \frac{s_A}{k_A} + \frac{s_C}{k_C} + \frac{s_D}{k_D} + \frac{1}{h_2}}$$

RISULTATI NUMERICI:

Sostituendo i valori numerici riportati in tabella:

h_1	10	W/m^2K	$T_{\infty 1}$	100	$^{\circ}C$
h_2	4	W/m^2K	$T_{\infty 2}$	0	$^{\circ}C$
k_A	7.50	W/mK	s_A, s_B, s_C, s_D	0.1	m
k_B	1.00	W/mK	h_A, h_B	0.4	m
k_C	5.00	W/mK	h_B	0.18	m
k_D	0.50	W/mK	h_C	0.22	m

Nel caso di superfici ortogonali isoterme si ottiene:

$$\dot{Q}' = - \frac{0 - 100}{\frac{1}{0.4 \cdot 10} + \frac{0.1}{0.4 \cdot 7.5} + \frac{1}{\frac{0.18 \cdot 1}{0.1} + \frac{0.22 \cdot 5}{0.1}} + \frac{0.1}{0.4 \cdot 0.5} + \frac{1}{0.4 \cdot 4}} = 67.27 \text{ W/m}$$

mentre con superfici parallele adiabatiche:

$$\dot{Q}' = -0.18 \cdot \frac{0 - 100}{\frac{1}{10} + \frac{0.1}{7.5} + \frac{0.1}{1} + \frac{0.1}{0.5} + \frac{1}{4}} - 0.22 \cdot \frac{0 - 100}{\frac{1}{10} + \frac{0.1}{7.5} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{0.5} + \frac{1}{4}} = 64.85 \text{ W/m}$$

La differenza percentuale assoluta tra i due flussi, valutata su quello minore, è pari al 3.74 %.

Esercizio 9.6

Argomento: Potenza termica scambiata tra fluidi

Si considerino due fluidi a $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h_1 = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$, maggiorato per tener in conto l'irraggiamento senza considerarlo esplicitamente) e $T_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h_2 = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$), separati da una parete solida di spessore $s = 50 \text{ mm}$ ($k = 15 \text{ W/mK}$). Si calcoli la potenza termica scambiata tra i due fluidi nel caso in cui la parete solida sia:

- una parete piana di superficie 1 m^2 ;
- di un cilindro di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ e raggio interno R_i tale da dare $S_i = 1 \text{ m}^2$;
- di una sfera cava di raggio interno R_i tale da dare $S_i = 1 \text{ m}^2$.

SOLUZIONE:

Nel caso della parete piana:

$$\dot{Q} = -S_i \cdot \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{h_1} + \frac{s}{k} + \frac{1}{h_e}}$$

Nel caso del cilindro:

$$\dot{Q} = -\frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{S_i \cdot h_1} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{S_e \cdot h_e}}$$

Nel caso della sfera:

$$\dot{Q} = -\frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{S_i \cdot h_1} + \frac{R_e - R_i}{4 \cdot \pi \cdot k \cdot R_i \cdot R_e} + \frac{1}{S_e \cdot h_e}}$$

Nota la superficie interna, il raggio interno è pari a:

- $R_i = \frac{S_i}{2 \cdot \pi \cdot L}$ nel caso del cilindro;
- $R_i = \sqrt{\frac{S_i}{4 \cdot \pi}}$ nel caso della sfera.

RISULTATI NUMERICI:

Sostituendo i valori numerici riportati in tabella:

T_1	100	$^{\circ}\text{C}$	$R_{i,cilindro}$	0.16	m
T_2	25	$^{\circ}\text{C}$	$R_{e,cilindro}$	0.21	m
h_1	100	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	$S_{e,cilindro}$	1.314	m^2
h_2	50	$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$	$R_{i,sfera}$	0.28	m
k	15	W/mK	$R_{e,sfera}$	0.33	m
s	0.05	m	$S_{e,sfera}$	1.386	m^2

Nel caso della parete piana si ottiene: $\dot{Q} = -1 \cdot \frac{25 - 100}{\frac{1}{100} + \frac{0.05}{15} + \frac{1}{50}} = 2250 \text{ W}$

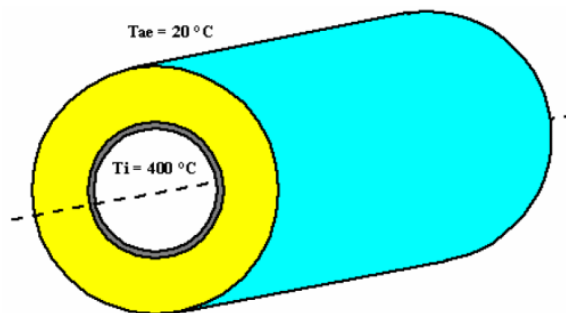
Nel caso del cilindro: $\dot{Q} = -\frac{25 - 100}{\frac{1}{1 \cdot 100} + \frac{\ln(0.21/0.16)}{2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 1} + \frac{1}{1.314 \cdot 50}} = 2667 \text{ W}$

Nel caso della sfera: $\dot{Q} = -\frac{25 - 100}{\frac{1}{1 \cdot 100} + \frac{0.33 - 0.28}{4 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 0.28 \cdot 0.33} + \frac{1}{1.386 \cdot 50}} = 2747 \text{ W}$

Esercizio 9.7

Argomento: Tubazione circolare

Un fluido ad alta temperatura scorre in una tubazione di sezione circolare (diametro interno $D_i = 210 \text{ mm}$) il cui involucro è costituito da $s_a = 5 \text{ mm}$ di acciaio ($k_a = 80 \text{ W}/\text{mK}$) e $s_i = 40 \text{ mm}$ di materiale isolante ($k_i = 0.09 \text{ W}/\text{mK}$). Sapendo che la temperatura della faccia interna della tubazione è $T_i = 400 \text{ }^{\circ}\text{C}$, mentre la temperatura dell'aria esterna alla tubazione è $T_{ae} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ($h_{ae} = 20 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$), calcolare il flusso termico disperso per unità di lunghezza. L'isolante si comporta davvero da isolante?



SOLUZIONE:

Il flusso termico disperso per unità di lunghezza può essere espresso come:

$$\dot{Q}' = \dot{Q}/L = -\frac{2 \cdot \pi \cdot (T_{ae} - T_i)}{\frac{1}{k_a} \cdot \ln \frac{R_i + s_a}{R_i} + \frac{1}{k_i} \cdot \ln \frac{R_i + s_a + s_i}{R_i + s_a} + \frac{1}{R_e \cdot h_e}}$$

Data l'elevata conducibilità termica e il piccolo spessore dello strato d'acciaio, quest'ultimo risulta praticamente trascurabile ai fini del calcolo del flusso disperso.

Per sapere se l'isolante diminuisce davvero la potenza termica scambiata, bisogna valutare il valore del raggio critico di isolamento:

$$\dot{Q}(R_{Is}) = -\frac{T_{\infty} - T(R_{Is})}{R_{Cond,Acc} + R_{Cond,Is} + R_{Conv}}$$

$$R_{Cond,Acc} = \frac{\ln \frac{R_{Acc,Ext}}{R_{Acc,Int}}}{2 \cdot \pi \cdot k_{Acc} \cdot L} \quad R_{Cond,Is} = \frac{\ln \frac{R_{Is}}{R_{Acc,Ext}}}{2 \cdot \pi \cdot k_{Is} \cdot L} \quad R_{Conv} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot R_{Is} \cdot L}$$

$$\frac{d\dot{Q}(R_{Is})}{dR_{Is}} = \frac{T_{\infty} - T(R_{Is})}{(R_{Cond,Acc} + R_{Cond,Is} + R_{Conv})^2} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot h_{Ae} \cdot R_{Is}^2 \cdot L} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k_{Is} \cdot R_{Is} \cdot L} \right)$$

$$\frac{d\dot{Q}(R_{Is})}{dR_{Is}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Is,CRIT} = \frac{k_{Is}}{h_{Ae}}$$

Se il valore del raggio esterno R_e è superiore al raggio critico di isolamento, l'isolante si comporta davvero da isolante. In caso contrario, l'isolante aumenta il flusso termico scambiato.

Se si trascurasse la curvatura delle parete del condotto (approssimazione a parete piana) il flusso termico disperso per unità di lunghezza risulterebbe:

$$\dot{Q}' = -\frac{1}{R_{tot}} \cdot (T_{ae} - T_i) = -\frac{1}{\frac{s_a}{k_a} + \frac{s_i}{k_i} + \frac{1}{h_{ae}}} \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{R_i + R_i + s_a + s_i}{2} \right) \cdot (T_{ae} - T_i)$$

dove $2 \cdot \pi \cdot R$ è la superficie per unità di lunghezza di un cilindro di raggio R ; per ridurre l'errore, si utilizza un raggio medio tra quello della superficie interna e quello della superficie esterna.

RISULTATI NUMERICI:

Il flusso termico disperso per unità di lunghezza è pari a:

$$\dot{Q}' = -\frac{2 \cdot 3.14 \cdot (20 - 400)}{\frac{1}{80} \cdot \ln \frac{0.105 + 0.005}{0.105} + \frac{1}{0.09} \cdot \ln \frac{0.105 + 0.005 + 0.04}{0.105 + 0.005} + \frac{1}{0.110 \cdot 20}} = 631.6 \text{ W/m}$$

Il raggio critico di isolamento è: $R_{Is,CRIT} = 0.09/20 = 0.0045 \text{ m} \ll s_i$

quindi l'isolante si comporta davvero da isolante: diminuisce il flusso termico scambiato!

Trascurando la curvatura della parete, il flusso termico risulterebbe:

$$\dot{Q}' = -\frac{1}{\frac{0.005}{80} + \frac{0.04}{0.09} + \frac{1}{20}} \cdot \left(2 \cdot 3.14 \cdot \frac{0.105 + 0.105 + 0.005 + 0.04}{2} \right) \cdot (20 - 400) = 615.6 \text{ W/m}$$

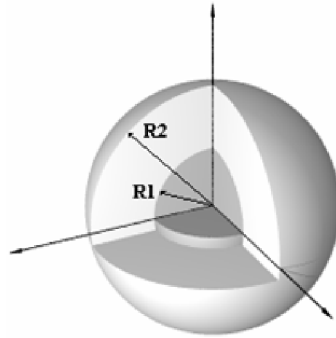
con un errore rispetto al calcolo rigoroso in coordinate cilindriche del - 2.54 %. Errore che dipende dal rapporto spessore/diametro!

Esercizio 9.8

Argomento: Sfera piena a due strati

La sfera piena rappresentata in figura è costituita da due parti solide distinte: la prima è una sfera centrale di raggio $R_1 = 0.25 \text{ m}$ e conducibilità $k_1 = 40 \text{ W/mK}$, in cui si ha una generazione di potenza interna \dot{Q}_1''' pari a 10^5 W/m^3 ; la seconda invece è una corona sferica di spessore $R_2 - R_1 = 0.25 \text{ m}$ e conducibilità $k_2 = 60 \text{ W/mK}$.

Sapendo che la sfera è lambita esternamente da aria a $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($h = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$) e che il sistema è in condizioni stazionarie, determinare la potenza termica trasmessa all'esterno ed il profilo di temperatura all'interno della corona sferica.



SOLUZIONE:

Esistono due modi per risolvere questo esercizio, uno “brute force” e uno più “astuto”.

Iniziando dal primo: si impongono le quattro condizioni al contorno disponibili, per determinare i valori delle quattro costanti che compaiono nell'espressione dei generici profili di temperatura $T_1(r)$ e $T_2(r)$ (ottenuti dall'integrazione dell'equazione di Poisson) rispettivamente per gli strati 1 (sfera piena) e 2 (corona sferica) della sfera composita.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_1''(0) = 0 \\ T_1(R_1) = T_2(R_1) \\ \dot{Q}_1''(R_1) = \dot{Q}_2''(R_1) \\ \dot{Q}_2''(R_2) = -h \cdot [T_\infty - T_2(R_2)] \end{array} \right.$$

cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad \implies \quad A_1 = 0 \\ -\frac{\dot{Q}_1'''}{6 \cdot k_1} \cdot R_1^2 - \frac{A_1}{R_1} + B_1 = -\frac{\dot{Q}_2'''}{6 \cdot k_2} \cdot R_1^2 - \frac{A_2}{R_1} + B_2 \\ \frac{\dot{Q}_1''' \cdot R_1}{3} - \frac{k_1 \cdot A_1}{R_1^2} = \frac{\dot{Q}_2''' \cdot R_1}{3} - \frac{k_2 \cdot A_2}{R_1^2} \\ \frac{\dot{Q}_2''' \cdot R_2}{3} - \frac{k_2 \cdot A_2}{R_2^2} = -h \cdot \left[T_\infty - \left(-\frac{\dot{Q}_2'''}{6 \cdot k_2} \cdot R_2^2 - \frac{A_2}{R_2} + B_2 \right) \right] \end{array} \right.$$

in cui $\dot{Q}_2''' = 0$ in quanto nella corona sferica non c'è generazione distribuita di potenza termica. Si tratta di un sistema lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite A_1, B_1, A_2, B_2 , risolvendolo si determinano i profili della temperatura e del flusso termico (da cui la potenza trasmessa all'esterno) nelle due parti della sfera.

Un secondo modo più semplice e veloce per rispondere alle domande poste nel testo dell'esercizio è però il seguente: il sistema è in condizioni stazionarie, quindi tutta la potenza termica generata internamente deve essere smaltita tramite la convezione esterna.

La potenza termica generata è pari a:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1''' \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3 \right) \quad \text{e quindi} \quad \dot{Q}''(R_1) = \frac{\dot{Q}_1''' \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3 \right)}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2}$$

che eguagliata all'espressione del flusso nello strato 2 permette di ricavare immediatamente A_2 :

$$A_2 = -\frac{\dot{Q}_1''' \cdot R_1^3 / 3}{k_2}$$

Nota A_2 , dall'equazione che eguaglia il flusso conduttivo e quello convettivo in R_2 si può ricavare B_2 :

$$B_2 = T_\infty + \left[\frac{1}{R_2} \cdot \left(1 - \frac{k_2}{h \cdot R_2} \right) \right] \cdot A_2$$

RISULTATI NUMERICI:

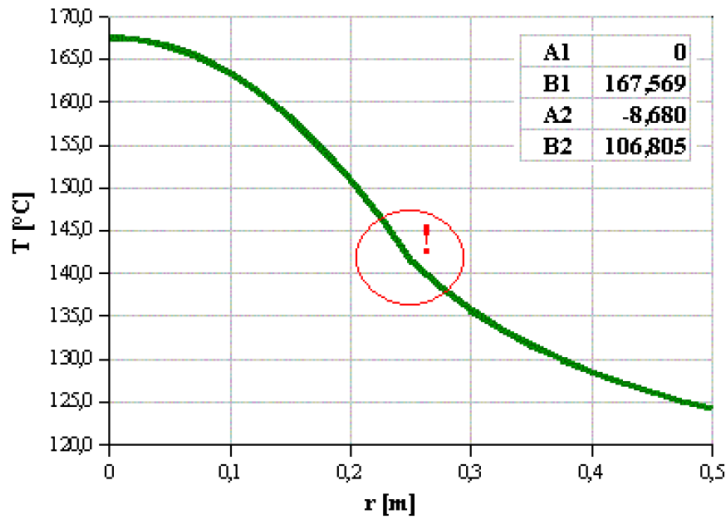
La potenza termica trasmessa all'esterno è pari a: $\dot{Q} = 10^5 \cdot (4/3 \cdot 3.14 \cdot 0.25^3) = 6541.6 \text{ W}$

Il profilo di temperatura e il valore delle incognite A_1, B_1, A_2, B_2 sono riportati in figura:

Esercizio 9.9

Argomento: Stima di h - parete piana isoterma

Una parete piana ($k = 0.0355 \text{ W/mK}$) orizzontale isoterma a $T_P = 20 \text{ °C}$ è lambita da aria le cui condizioni indisturbate sono: $T_\infty = 330 \text{ °C}$, $P_\infty = 10 \text{ kN/m}^2$, $w_\infty = 10 \text{ m/s}$. Determinare la potenza



termica per unità di larghezza scambiata tra lastra e aria fino ad una distanza $L = 0.5$ m dal bordo di attacco.

SOLUZIONE:

Ipotizzando regime stazionario e trascurando il contributo dell'irraggiamento (ipotesi che si faranno sempre se non diversamente precisato), si ha:

$$\dot{Q}' = \dot{Q}/\text{larghezza} = \bar{h}_L \cdot L \cdot (T_P - T_\infty)$$

Per determinare \bar{h}_L bisogna prima determinare se si è in regime laminare o turbolento.

$$Re_L = w_\infty \cdot L/\nu \quad \text{in cui} \quad \nu = \mu/\rho$$

Le proprietà termofisiche vanno calcolate alla pressione a cui si trova il fluido e alla temperatura di film: $T_{film} = (T_P + T_\infty)/2$. La dipendenza dalla temperatura si trova tabulata, tipicamente però per pressione atmosferica. L'unica proprietà termofisica di interesse che varia sensibilmente con la pressione è la ν (a causa della sua dipendenza da ρ), di conseguenza è necessaria una correzione:

$$\nu/\nu_{Tab} = P_{Tab}/P \quad (\text{Ipotesi di gas ideale})$$

Nel caso di lastra piana orizzontale il numero di Reynolds critico è $Re_{L,crit} = 5 \cdot 10^5$. A seconda della tipologia di moto (laminare o turbolento) bisognerà scegliere l'opportuna correlazione per calcolare il numero di Nusselt ($Nu = f(Re, Pr)$), da cui ricavare il coefficiente di scambio termico convettivo medio e quindi la potenza termica scambiata.

RISULTATI NUMERICI:

Nel caso in esame risulta:

$$T_{film} = 175 \text{ C} = 448.15 \text{ K}$$

$$\nu_{Tab} = 31.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\nu = 31.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = 0.718$$

$$Re_L = 10 \cdot 0.5 / (31.8 \cdot 10^{-5}) = 15723$$

Quindi il moto è laminare su tutta la parete. Si può quindi utilizzare la seguente correlazione:

$$\overline{Nu}_L = 0.664 \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.6)$$

$$\overline{Nu}_L = 0.664 \cdot 15723^{1/2} \cdot 0.718^{1/3} = 74.56$$

Il coefficiente di scambio termico risulta: $\bar{h} = \overline{Nu}_L \cdot k/L = 74.56 \cdot 0.0355/0.5 = 5.29 \text{ W/m}^2\text{K}$

da cui: $\dot{Q}' = 5.29 \cdot 0.5 \cdot (20 - 330) = -820.5 \text{ W/m}$

Esercizio 9.10

Argomento: Stima di h - lampadina

Il bulbo di una lampadina da $\dot{L} = 40 \text{ W}$ è assimilabile ad una sfera di diametro 50 mm, la cui superficie quando la lampadina è accesa raggiunge una temperatura $T_P = 140 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare la percentuale della potenza dissipata per convezione rispettivamente quando:

1. il bulbo è immerso in aria tranquilla alla temperatura $T_\infty = 27 \text{ }^\circ\text{C}$;
2. il bulbo è investito da una corrente d'aria caratterizzata da $T_\infty = 27 \text{ }^\circ\text{C}$, $w_\infty = 0.3 \text{ m/s}$, che incrementa lo scambio termico.

SOLUZIONE:

Nel caso 1, di convezione naturale, una correlazione adatta per sfere è la seguente:

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 \cdot Ra_D^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}$$

valida per $Ra_D \leq 10^{11}$; $Pr \geq 0.7$, con proprietà termofisiche da calcolare a T_{film} .

Se la correlazione è applicabile si ricava \overline{Nu}_D , da cui: $\bar{h}_D = \overline{Nu}_D \cdot k/D$

Dunque: $\dot{Q} = \bar{h}_D \cdot 4 \cdot \pi \cdot D^2/4 \cdot (T_P - T_\infty)$

e la percentuale di potenza dissipata per convezione è: $\dot{Q}/\dot{L} \cdot 100$

Nel caso 2, in presenza di una corrente fluida con una velocità indipendente dai campi termici, lo scenario può essere duplice:

- convezione forzata
- convezione mista

Per verificare in che caso ci si trovi, bisogna valutare il rapporto Gr/Re^2 (con proprietà termofisiche a T_{film}):

- $Gr/Re^2 \ll 1 \implies$ convezione forzata
- $Gr/Re^2 \approx 1 \implies$ convezione mista
- $Gr/Re^2 \gg 1 \implies$ convezione naturale

A seconda della tipologia di interazione bisognerà scegliere l'opportuna correlazione.

RISULTATI NUMERICI:

Nel caso 1, di convezione naturale, si ha:

$$T_{film} = (27 + 140)/2 = 83.5 \text{ C} = 357 \text{ K}$$

$$\nu = 21.69 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 30.53 \cdot 10^{-3} \text{ W/mK}$$

$$Pr = 0.699$$

$$Ra_D = Gr_D \cdot Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_P - T_\infty) \cdot D^3}{\nu^2} \cdot Pr = \frac{9.81 \cdot (1/357) \cdot (140 - 27) \cdot 0.05^3}{(21.69 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0.699 = 576500$$

La correlazione è applicabile, e se ne ottiene $\overline{Nu}_D = 14.5$, da cui $\overline{h}_D = 8.9 \text{ W/m}^2\text{K}$.

La potenza termica dissipata per convezione è: $\dot{Q} = 8.9 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 0.05^2/4 \cdot (140 - 27) = 7.9 \text{ W}$

che risulta essere il: $7.9/40 \cdot 100 = 19.8 \%$ della potenza totale dissipata.

Nel caso 2, in presenza di una corrente fluida indipendente dai campi termici, si ha:

$$Re_D = w_\infty \cdot D/\nu = 0.3 \cdot 0.05/(21.86 \cdot 10^{-6}) = 691.6$$

$$Gr/Re^2 = 1.72 \approx 1$$

Dunque si tratta di convezione mista, in cui lo spostamento del fluido indotto dai gradienti termici e quello forzato dall'esterno sono paragonabili, e dunque la convezione naturale non può essere trascurata. In questo caso:

$$\overline{Nu}_D^n = \overline{Nu}_{DF}^n \pm \overline{Nu}_{DN}^n$$

“+” per flussi aventi medesimo verso (che collaborino nello scambio termico), “-” per flussi opposti (che si ostacolano nello scambio termico); $n = 3$ per la maggior parte delle geometrie “semplici”.

Per calcolare il \overline{Nu}_{DF} si può utilizzare la correlazione di Whitaker, valida per sfere in convezione forzata:

$$\overline{Nu}_{DF} = 2 + \left(0.4 \cdot Re_D^{1/2} + 0.06 \cdot Re_D^{2/3}\right) \cdot Pr^{0.4} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_P}\right)^{1/4}$$

valida per $3.5 < Re_D < 7.6 \cdot 10^4$; $0.71 < Pr < 380$; $1 < \frac{\mu_\infty}{\mu_P} < 3.2$, con proprietà termofisiche da valutare a T_∞ eccetto che μ_P valutata a T_P .

Nel caso non valga l'ultima condizione, la correlazione va applicata senza il termine correttivo finale sulle viscosità, valutando però le proprietà termofisiche a T_{film} .

Bisogna quindi verificare innanzi tutto il rapporto tra le viscosità ∞ e alla parete. Esso risulta < 1 e dunque la correlazione va applicata senza termine correttivo e con proprietà calcolate a T_{film} .

Se ne ottiene $\overline{Nu}_{DF} = 15.2$, da cui $\overline{h}_{DF} = 9.2 \text{ W/m}^2\text{K}$ (effettivamente dello stesso ordine di grandezza di quello da convezione naturale!).

Quindi: $\overline{Nu}_D = \sqrt[3]{\overline{Nu}_{DF}^3 + \overline{Nu}_{DN}^3} = \sqrt[3]{15.2^3 + 14.5^3} = 18.7$, da cui $\overline{h}_D = 11.4 \text{ W/m}^2\text{K}$

La potenza termica dissipata per convezione è: $\dot{Q} = 11.4 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 0.05^2/4 \cdot (140 - 27) = 10.1 \text{ W}$

che risulta essere il: $10.1/40 \cdot 100 = 25.3 \%$ della potenza totale dissipata.

Esercizio 9.11

Argomento: Stima di h - lastra quadrata

La superficie di una lastra quadrata di lato pari a 500 mm (area A , perimetro P) ha emissività $\varepsilon = 0.9$ ed è mantenuta alla temperatura di 90 °C. Calcolare la potenza scambiata dalla lastra in un ambiente costituito da una stanza con aria tranquilla a 25 °C nel caso la lastra sia posta sul pavimento e nel caso invece sia attaccata al soffitto. Per semplicità si consideri in entrambi i casi adiabatico il retro della lastra e si ritenga la stanza una cavità nera a 25 °C.

SOLUZIONE:

La lastra scambia energia per convezione e per irraggiamento.

Per lo scambio convettivo per lastra piana sul pavimento, con faccia superiore riscaldata, una correlazione adatta è la seguente:

$$\overline{Nu}_{Dcar} = 0.54 \cdot Ra_{Dcar}^{1/4}$$

con $D_{car} = A/P$, proprietà termofisiche da valutare a T_{film} , valida per $10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$.

da \overline{Nu}_L si ricava: $\overline{h}_L = \overline{Nu}_L \cdot k/L$

e quindi la potenza termica scambiata è: $\dot{Q}_C = \overline{h}_L \cdot A \cdot (T_P - T_\infty)$

Per lo scambio convettivo per lastra piana sul soffitto, con faccia inferiore riscaldata, una correlazione adatta è la seguente:

$$\overline{Nu}_L = 0.27 \cdot Ra_L^{1/4} \quad (= 1/2 \cdot \overline{Nu}_{L_{pavimento}})$$

e la potenza termica scambiata si ricava analogamente al caso precedente.

Per lo scambio radiativo, sia che la lastra sia sul pavimento, sia che sia sul soffitto, la potenza scambiata per irraggiamento è pari a:

$$\dot{Q}_R = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A (T_P^4 - T_\infty^4)$$

Quindi la potenza complessivamente scambiata è pari a: $\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_C + \dot{Q}_R$

RISULTATI NUMERICI:

Nel caso in esame, per lastra sul pavimento:

$$T_{film} = (25 + 90)/2 = 57.5 \text{ C} \approx 331 \text{ K}$$

$$Pr = 0.703$$

$$Ra = 7.296 \cdot 10^6$$

$$\overline{Nu}_L = 28$$

$$\overline{h}_L = 6.4 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\dot{Q}_C = 6.4 \cdot 0.25 \cdot (90 - 25) = 104 \text{ W}$$

Per lastra sul soffitto invece:

$$\overline{Nu}_L = 14$$

$$\overline{h}_L = 2.7 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\dot{Q}_C = 3.2 \cdot 0.25 \cdot (90 - 25) = 52 \text{ W}$$

La potenza scambiata per irraggiamento è: $\dot{Q}_R = 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.25 (363.15^4 - 298.15^4) = 121 \text{ W}$

La potenza complessivamente scambiata è pari a 225 W nel caso di lastra sul pavimento e 173 W nel caso di lastra sul soffitto.

OSSERVAZIONI:

Si definisce a volte un coefficiente di scambio radiativo h_R tale che:

$$h_R \cdot A \cdot (T_P - T_\infty) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_P^4 - T_\infty^4)$$

da cui:

$$h_R = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_P + T_\infty) \cdot (T_P^2 + T_\infty^2)$$

e quindi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_C + \dot{Q}_R = (h_C + h_R) \cdot A \cdot (T_P - T_\infty)$$

Si noti come h_R dipenda fortemente dalla temperatura, al contrario di quanto accade in genere per h_C .

Esercizio 9.12

Argomento: Parametri concentrati - termometro e termocoppia

Confrontare i profili $T(\tau)$ di un “termometro” (sferetta di mercurio) e di una “termocoppia” (sferetta di ferro).

SOLUZIONE:

Si tratta di un esercizio “base” sul transitorio a parametri concentrati, nel quale si può utilizzare

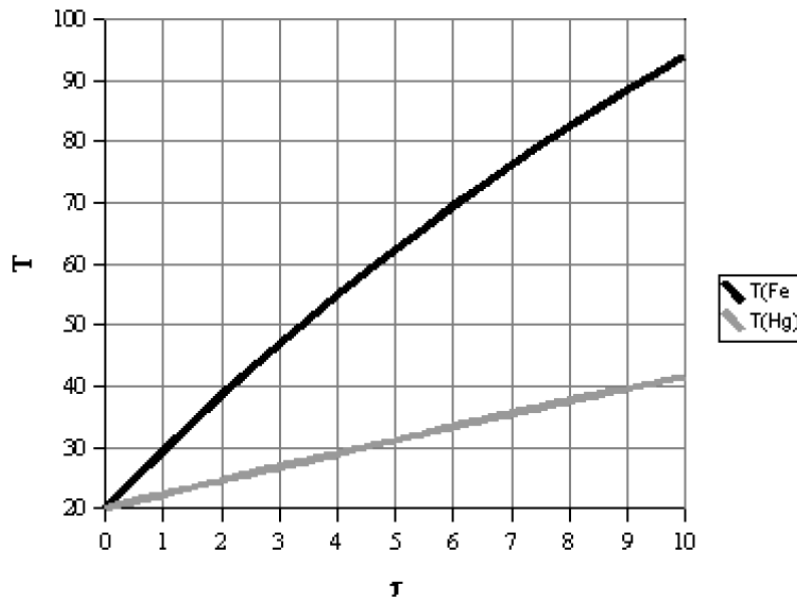
direttamente la formula classica $T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-\frac{h A}{\rho V c} \Delta \tau}$

In tabella si riportano i dati riassuntivi per termometro e termocoppia:

	Fe	Hg
R	0.0004	0.0035
ρ	7600	13500
c	502.32	136.045
T_0	20	20
T_∞	190	190
h	29.07	29.07
A/V	7500.00	857.14

Nella tabella e nella figura seguenti si riportano i profili di temperatura ottenuti:

τ	T_{Fe}	T_{Hg}	τ	T_{Fe}	T_{Hg}	τ	T_{Fe}	T_{Hg}
0	20	20	3.5	50.80	27.88	7	76.02	35.40
0.5	24.79	21.15	4	54.72	28.95	7.5	79.23	36.45
1	29.44	22.29	4.5	58.53	30.07	8	82.35	37.48
1.5	33.96	23.42	5	62.23	31.15	8.5	85.38	38.52
2	38.35	24.55	5.5	65.82	32.22	9	88.32	39.54
2.5	42.62	25.67	6	69.32	33.29	9.5	91.18	40.56
3	46.77	26.78	6.5	72.72	34.35	10	93.97	41.57



Esercizio 9.13

Argomento: Parametri concentrati - condotto lambito da aria umida

In un condotto (diametro interno $D_i = 50$ mm, diametro esterno $D_e = 52$ mm, $k = 400$ W/mK, $\rho = 8900$ kg/m³, $c = 385$ J/kgK), inizialmente a $T_0 = 25$ °C, inizia a fluire acqua fredda a $T_i = 5$ °C ($h_i = 200$ W/m²K); esternamente il tubo è lambito da aria umida (p_{atm} , $T_\infty = 25$ °C, $\varphi = 54$ %, $h_e = 5$ W/m²K) le cui condizioni si possono ritenere costanti. Spiegando e giustificando le ipotesi ed eventuali approssimazioni utilizzate, determinare la legge di variazione nel tempo della temperatura del condotto e dopo quanto tempo si ha formazione di condensa sulla superficie esterna del condotto. S suggerimento: si ragioni per unità di lunghezza del condotto.

SOLUZIONE:

Scrivendo il primo principio della termodinamica per un dominio solido, in assenza di lavoro e generazione interna di potenza ma con due scambi convettivi, si ha:

$$\frac{dU}{d\tau} = -h_A \cdot A_E \cdot (T - T_A) - h_G \cdot A_I \cdot (T - T_G)$$

$$\rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{dT}{d\tau} = -h_A \cdot A_E \cdot (T - T_A) - h_G \cdot A_I \cdot (T - T_G) = -(h_A \cdot A_E + h_G \cdot A_I) \cdot T + h_A \cdot A_E \cdot T_A + h_G \cdot A_I \cdot T_G$$

$$-\frac{\rho \cdot V \cdot c}{h_A \cdot A_E + h_G \cdot A_I} \cdot \frac{dT}{d\tau} = T - \frac{h_A \cdot A_E \cdot T_A + h_G \cdot A_I \cdot T_G}{h_A \cdot A_E + h_G \cdot A_I}$$

e ponendo $\theta = T - \frac{h_A \cdot A_E \cdot T_A + h_G \cdot A_I \cdot T_G}{h_A \cdot A_E + h_G \cdot A_I}$ (quindi $d\theta = dT$), si ha:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{h_A \cdot A_E + h_G \cdot A_I}{\rho \cdot V \cdot c} \cdot d\tau$$

e da qui in poi è del tutto analogo al “classico” transitorio a parametri concentrati.

Si noti come rispetto all’equazione che si ottiene con un solo scambio convettivo, qui si ha come “trasmittanza convettiva” la somma delle due trasmittanze singole, e come “ T_f ” la media delle temperature dei fluidi pesata attraverso le superfici di scambio e i coefficienti convettivi.

RISULTATI NUMERICI:

Dai diagrammi dell’aria umida si ricava la temperatura di rugiada, pari a 15 °C.

Si avrà formazione di condensa quando la temperatura della superficie esterna del condotto sarà pari alla temperatura di rugiada.

Nel caso in esame si ha:

$$T_0 = 25 \text{ C}$$

$$T_i = 5 \text{ C}$$

$$T_e = 25 \text{ C}$$

$$h_i = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_e = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$A_i/L = 0.15708 \text{ m}$$

$$A_e/L = 0.163363 \text{ m}$$

$$T_{\infty,P} = 5.506823 \text{ C}$$

$$h_{tot} = 32.232741 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 0.00016 \text{ m}^3$$

$$c = 385 \text{ J/kgK}$$

$$Bi = 0.00051$$

$$esponente = -0.058712$$

e si ottiene la variazione nel tempo della temperatura sulla superficie esterna riportata in tabella:

Esercizio 9.14

Argomento: Parete piana con faccia adiabatica

Una parete piana indefinitamente estesa lungo due direzioni spaziali ha una faccia adiabatica e l’altra lambita da un fluido a $T_\infty = 25 \text{ °C}$ ($h = 35 \text{ W/m}^2\text{K}$). La parete ha spessore $s = 45 \text{ mm}$, è omogenea ed isotropa con conducibilità costante $\lambda = 10 \text{ W/mK}$ ed è sede di una generazione distribuita di potenza $\dot{Q}''' = 10^4 \text{ W/m}^3$.

Ipotizzando di essere in condizioni stazionarie, determinare la temperatura T_p della faccia lambita dal fluido e indicare in che punto della parete si ha la temperatura massima raggiunta dalla stessa.

SOLUZIONE:

τ	T	τ	T
0.5	24.436077	6.5	18.815775
1	23.888467	7	18.430756
1.5	23.3567	7.5	18.056876
2	22.840316	8	17.693813
2.5	22.33887	8.5	17.341252
3	21.851931	9	16.99889
3.5	21.379079	9.5	16.666433
4	20.919907	10	16.343594
4.5	20.474017	10.5	16.030094
5	20.041027	11	15.725663
5.5	19.620563	11.5	15.43004
6	19.212263	12.25	15.002562

La potenza per unità di superficie generata nella parete è pari a:

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}''' \cdot s = 10^4 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = 450 \text{ W/m}^2$$

In condizioni stazionarie tutto il flusso termico è disperso per convezione, quindi:

$$\dot{Q}'' = h \cdot (T_p - T_\infty)$$

da cui:

$$T_p = T_\infty + \dot{Q}''/h = 25 + 450/35 = 37.85 \text{ C}$$

Nella parete si ha la massima temperatura all'interfaccia della faccia adiabatica.

Esercizio 9.15

Argomento: Tubazione cilindrica

Vapore condensante alla temperatura $T_v = 320 \text{ °C}$ fluisce all'interno di una tubazione di ghisa ($\lambda = 80 \text{ W/mK}$) i cui diametro interno ed esterno sono rispettivamente $D_i = 5 \text{ cm}$ e $D_e = 5.5 \text{ cm}$. La tubazione è rivestita da un isolante di lana di vetro ($\lambda = 0.05 \text{ W/mK}$) con spessore $s = 3 \text{ cm}$.

Si ha trasmissione di calore verso l'ambiente circostante alla temperatura $T_e = 5 \text{ °C}$, con un coefficiente di scambio termico $h_e = 18 \text{ W/m}^2\text{K}$. Il coefficiente di scambio termico all'interno della tubazione è $h_i = 12000 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Si determino:

- qualitativamente il profilo di temperatura nella sezione dell'insieme tubo-isolante;
- la potenza termica dissipata dal vapore per unità di lunghezza della tubazione;
- la differenza di temperatura tra le superfici che delimitano la tubazione e quelle che delimitano l'isolante.

SOLUZIONE:

Passando all'equivalenza elettrica, dall'interno della tubazione verso l'esterno si incontrano 4 resistenze in serie.

Per cui la potenza termica dissipata per unità di lunghezza è pari a:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{T_v - T_e}{R_{tot}} = \frac{T_v - T_e}{R_{cvi} + R_{cd} + R_{cd_{is}} + R_{cve}}$$

dove:

- R_{cv_i} è la resistenza convettiva interna:

$$R_{cv_i} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot h_i} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.025 \cdot 12000} = 5.3 \cdot 10^{-4} \text{ mK/W}$$

- R_{cd} è la resistenza conduttiva della tubazione in ghisa:

$$R_{cd} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} = \frac{(2.75 \cdot 10^{-2})/(2.5 \cdot 10^{-2})}{2 \cdot \pi \cdot 80} = 1.89 \cdot 10^{-4} \text{ mK/W}$$

- $R_{cd_{is}}$ è la resistenza conduttiva del materiale isolante:

$$R_{cd_{is}} = \frac{\ln(r_{is}/r_e)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{is}} = \frac{(5.75 \cdot 10^{-2})/(2.75 \cdot 10^{-2})}{2 \cdot \pi \cdot 80} = 2.35 \text{ mK/W}$$

- R_{cv_e} è la resistenza convettiva esterna:

$$R_{cv_e} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_{is} \cdot h_e} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.0575 \cdot 18} = 1.54 \cdot 10^{-1} \text{ mK/W}$$

per cui la potenza termica dissipata dal vapore per unità di lunghezza risulta:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{320 - 5}{5.3 \cdot 10^{-4} + 1.89 \cdot 10^{-4} + 2.35 + 1.54 \cdot 10^{-1}} = 125.8 \text{ W/m}$$

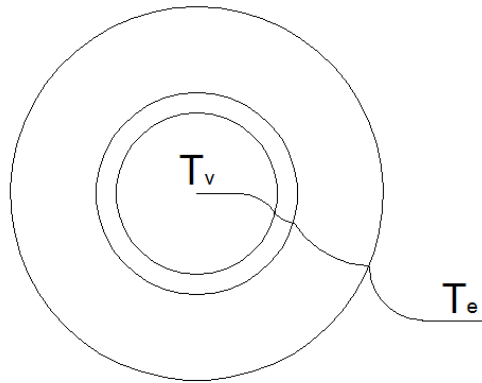
Dato che le resistenze sono in serie, il flusso che le attraversa è il medesimo e pari a 125.8 W/m . Per cui le temperature alle interfacce sono:

$$T_{s_i} = T_v - \dot{Q}/L \cdot R_{cv_i} = 320 - 125.8 \cdot 5.3 \cdot 10^{-4} = 319.93 \text{ C}$$

$$T_{s_e} = T_v - \dot{Q}/L \cdot (R_{cv_i} + R_{cd}) = 320 - 125.8 \cdot (5.3 \cdot 10^{-4} + 1.89 \cdot 10^{-4}) = 319.91 \text{ C}$$

$$T_{s_{is}} = T_e + \dot{Q}/L \cdot R_{cv_e} = 5 + 125.8 \cdot 1.54 \cdot 10^{-1} = 24.36 \text{ C}$$

Il profilo qualitativo di temperatura nella sezione dell'insieme tubo-isolante è il seguente:



Esercizio 9.16

Argomento: Parete piana con generazione di potenza

Una parete piana indefinita avente uno spessore $s = 75 \text{ mm}$ e conducibilità termica $\lambda = 12 \text{ W/mK}$, è sede di generazione uniforme di potenza $\dot{Q}''' = 2 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$.

Sapendo che sulla superficie di sinistra è imposta una temperatura $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ e su quella di destra una temperatura $T_2 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$, determinare:

1. la temperatura sull'asse della parete (cioè per $x=s/2$);
2. il coefficiente convettivo sul lato della superficie di destra sapendo che il fluido coinvolto si trova a una temperatura $T_{\infty,2} = 2 \text{ } ^\circ\text{C}$.

SOLUZIONE:

Si mettono a sistema le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} T(x_1) = -\dot{Q}''' / (2 \cdot \lambda) \cdot x_1^2 + C_1 \cdot x_1 + C_2 \\ T(x_2) = -\dot{Q}''' / (2 \cdot \lambda) \cdot x_2^2 + C_1 \cdot x_1 + C_2 \\ \dot{Q}''(x_2) = \dot{Q}''' \cdot x_2 - C_1 \cdot \lambda \\ \dot{Q}''(x_2) = -h \cdot (T_{\infty,2} - T_{p,2}) \end{cases}$$

Dalla prima, sostituendo $x_1 = 0$ si ottiene immediatamente: $C_2 = T(x_1)$

dalla seconda si ottiene quindi: $C_1 = [T(x_2) + \dot{Q}''' / (2 \cdot \lambda) \cdot x_2^2 - C_2] / x_1$

Si può così calcolare $\dot{Q}''(x_2)$, da cui: $h = \dot{Q}''(x_2) / (T_{p,2} - T_{\infty,2})$

Dunque: $T(x) = -\dot{Q}''' / (2 \cdot \lambda) \cdot x_1^2 + C_1 \cdot x_1 + C_2$

Listato Matlab:

```
s=75e-3;
k=12;
Up3=2e5;

T1=20+273.15;
T2=50+273.15;

Too2=2+273.15;

C2=T1;

C1=(T2+Up3*s^2/(2*k)-C2)/s;

Qp22=Up3*s-C1*k;

h=-Qp22/(Too2-T2);
```

RISULTATI NUMERICI:

Esercizio 9.17

Argomento: Conduzione, convezione, irraggiamento

C1	1025.000000	C2	293.150000	Qp22	2700.000000	T1	293.150000
T2	323.150000	Too2	275.150000	Up3	200000.000000	h	56.250000
k	12.000000	s	0.075000				

Una parete piana ($s = 18 \text{ cm}$, $\lambda = 0.2 \text{ W/mK}$) indefinitamente estesa lungo due direzioni spaziali (y, z), presenta sulla superficie $x = s$, caratterizzata da una emissività $\varepsilon_s = 0.8$, una temperatura $T_s = 85 \text{ }^\circ\text{C}$. Tale superficie è lambita da aria con temperatura indisturbata $T_\infty = 40 \text{ }^\circ\text{C}$, $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ ed è affacciata ad una superficie grigia ad essa parallela ed indefinita lungo y e z con temperatura $T_p = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ e caratterizzata da un coefficiente di assorbimento $\alpha_p = 0.65$.

Si determini la temperatura T_0 che si presenta sulla superficie $x = 0$ della parete.

SOLUZIONE:

Attraverso l'intercapedine si hanno sia flusso convettivo sia flusso radiativo, la cui somma eguaglia (dato che si è in condizioni stazionarie) il flusso conduttivo attraverso la parete solida. Dunque:

$$\dot{Q}'' = -\lambda/s \cdot (T_s - T_0) = -h \cdot (T_\infty - T_s) - \sigma \cdot (T_p^4 - T_s^4)/(1/\varepsilon_s + 1/\varepsilon_p - 1)$$

con $\varepsilon_p = \alpha_p$ per il principio di Kirchhoff.

L'unica incognita è T_0 , per cui:

$$T_0 = T_s - s/\lambda \cdot [h \cdot (T_\infty - T_s) + \sigma \cdot (T_p^4 - T_s^4)/(1/\varepsilon_s + 1/\varepsilon_p - 1)]$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$T_0 = 85 - 0.18/0.2 \cdot [25 \cdot (40 - 85) + 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (283.15^4 - 358.15^4)/(1/0.8 - 1/0.65 - 1)] = 1383.56 \text{ C}$$

Esercizio 9.18

Argomento: Lamina sottile con effetto Joule

Tra due pareti piane indefinite di ugual spessore, $s = 18 \text{ cm}$, è interposta una lamina di rame con spessore trascurabile dove viene dissipata elettricamente una potenza specifica di 1 W/cm^2 . Sapendo che una parete ha conducibilità termica $\lambda_1 = 10 \text{ W/mK}$ ed è lambita da aria alla temperatura indisturbata di $15 \text{ }^\circ\text{C}$ con coefficiente convettivo $h_1 = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$, mentre l'altra parete ha conducibilità termica $\lambda_2 = 10 \text{ W/mK}$ ed è lambita da acqua alla temperatura indisturbata di $20 \text{ }^\circ\text{C}$ con coefficiente convettivo $h_2 = 60 \text{ W/m}^2\text{K}$, si determino:

1. la temperatura della lamina in rame supposta omoterma, ovvero la temperatura all'interfaccia delle pareti
2. la potenza termica per unità di superficie trasmessa all'acqua

Si rappresentino qualitativamente gli andamenti di temperatura nel sistema descritto.

SOLUZIONE:

La dissipazione elettrica nella lamina centrale porta ad un flusso termico che deve essere smaltito dal sistema (per il resto composto da strati puramente passivi), in parte verso destra in parte verso sinistra, in proporzione legata alla configurazione del sistema dai due lati della lamina.

Dato che il dominio conduttivo è simmetrico rispetto alla lamina, ma il dominio convettivo no, tale

flusso termico si divide in parti disuguali. E' dunque necessario impostare il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}''_{sx} = -\frac{T_{\infty,sx} - T_{lamina}}{s/\lambda + 1/h_{sx}} \\ \dot{Q}''_{dx} = -\frac{T_{\infty,dx} - T_{lamina}}{s/\lambda + 1/h_{dx}} \\ \dot{Q}''_{tot} = \dot{Q}''_{sx} + \dot{Q}''_{dx} \end{array} \right.$$

da cui:

$$T_{lamina} = \frac{\dot{Q}'' + T_{\infty,sx}/(s/\lambda + 1/h_{sx}) + T_{\infty,dx}/(s/\lambda + 1/h_{dx})}{1/(s/\lambda + 1/h_{sx}) + 1/(s/\lambda + 1/h_{dx})}$$

e nota T_{lamina} si calcolano facilmente i flussi nei due versi.

Sostituendo i valori numerici: $T_{lamina} = 248 \text{ C}$, $\dot{Q}''_{sx} = 3425 \text{ W/m}^2$, $\dot{Q}''_{dx} = 6575 \text{ W/m}^2$.

L'andamento di temperatura nei due strati solidi è lineare, con pendenza legata al flusso termico dato che la conducibilità è uguale. Il salto di temperatura tra le facce esterne degli strati solidi ed i fluidi indisturbati dipende invece sia dal flusso termico sia dal coefficiente convettivo, diverso tra aria e acqua.

Esercizio 9.19

Argomento: *Errore di lettura del termometro*

Al centro di un locale di civile abitazione (dimensioni in metri $4 \times 4 \times 3$) è posto un termometro a mercurio la cui superficie esterna ha estensione $A_T = 0.9 \text{ cm}^2$ ed è caratterizzata da un coefficiente di assorbimento (grado di nerezza) pari a 0.7. La scala del termometro indica una temperatura di $22 \text{ }^\circ\text{C}$. Supponendo che tutte le superfici della stanza (pareti, soffitto e pavimento) siano alla temperatura di $8 \text{ }^\circ\text{C}$ e sapendo che la convezione che si instaura nel locale è caratterizzata da un coefficiente convettivo $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$, determinare l'effettiva temperatura dell'aria che circonda il termometro.

SOLUZIONE:

Impostando un bilancio termico in condizioni stazionarie sul termometro e considerando che il termometro è molto piccolo rispetto alla "cavità" costituita dalla stanza:

$$-A_T \cdot \varepsilon_T \cdot \sigma \cdot (T_T^4 - T_P^4) - h \cdot A_T \cdot (T_T - T_A) = 0$$

in cui l'unica incognita è T_A , per cui:

$$T_A = T_T + \varepsilon_T \cdot \sigma \cdot (T_T^4 - T_P^4) / h = 295.15 + 0.7 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (295.15^4 - 281.15^4) / 25 = 297.3 \text{ K} = 24.13 \text{ }^\circ\text{C}$$

Esercizio 9.20

Argomento: *Scambio termico per conduzione, convezione, irraggiamento*

Una sfera cava di diametro esterno $D_s = 100 \text{ mm}$ è costituita da due strati aventi spessori e conduttività rispettivamente $s_1 = 10 \text{ mm}$, $\lambda_1 = 0.5 \text{ W/mK}$, $s_2 = 20 \text{ mm}$, $\lambda_2 = 10 \text{ W/mK}$. Lo strato interno 1 è sede di una generazione interna di potenza $\dot{U}''' = 5 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$. La sfera è immersa in una corrente di aria che scorre all'interno di un condotto di diametro $D_c \gg D_s$. La temperatura della superficie esterna della sfera è $T_p = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, mentre quella delle pareti del condotto è $T_c = 15 \text{ }^\circ\text{C}$; il coefficiente convettivo tra aria e sfera, approssimato a uniforme su tutta la superficie della sfera, è $h = 45 \text{ W/m}^2\text{K}$; la superficie esterna della sfera è approssimabile dal punto di vista radiativo ad un corpo grigio con emissività $\varepsilon_s = 0.75$. Sapendo che il sistema è in condizioni stazionarie, determinare la temperatura del fluido lontano dalla sfera e la temperatura dell'interfaccia tra gli strati 1 e 2 della sfera.

SOLUZIONE:

sigma=5.67e-8;

Ds=100e-3;

s1=10e-3;

s2=20e-3;

k1=0.5;

k2=10;

Up3=5e5;

eps=0.75;

```

Tp=100+273.15;
Tc=15+273.15;

h=45;

Rs=Ds/2;

R1i=Ds/2-s2-s1;
R1e=R1i+s1;

Vs1=4/3*pi*(R1e^3-R1i^3);

Qp=Up3*Vs1; %potenza da dissipare, che deve andare tutta verso l'esterno
            %dato che la regione centrale della sfera non potrebbe
            %smaltirne

As=4*pi*Rs^2; %area esterna della sfera

Qp2_Rs=Qp/As; %flusso in corrispondenza della superficie esterna della sfera

%bilancio energetico alla superficie esterna della sfera:
% Qp2_Rs=-h*(Too-Tp)-eps*sigma*(Tc^4-Tp^4)
%dal punto di vista radiativo il condotto è come una grande cavità
%In questa equazione l'unica incognita è Too
Too=Tp-(Qp2_Rs+eps*sigma*(Tc^4-Tp^4))/h;

Qp_Rs_conv=-h*(Too-Tp);
Qp_Rs_rad=-eps*sigma*(Tc^4-Tp^4);

%considerando lo strato 2, passivo, e imponendo le condizioni al contorno
%di flusso imposto sulla superficie interna e di temperatura imposta sulla
%superficie esterna:
%T(r) = - C1/r + C2
%Qp2(r) = - k C1/r^2
%quindi:
%T(Rs)=-C1/Rs+C2
%Qp2_Rs=-k C1 / Rs^2

C1=-Qp2_Rs*Rs^2/k2;
C2=Tp+C1/Rs;

T12=-C1/R1e+C2;

```

RISULTATI NUMERICI:

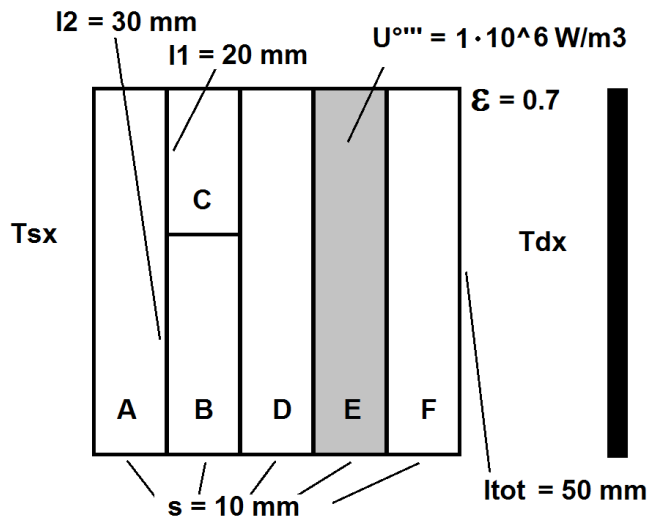
As	0.031416	$C1$	-0.316667	$C2$	366.816667	Ds	0.100000
Qp	39.793507	$Qp2Rs$	1266.666667	$QpRs_{conv}$	735.360021	$QpRs_{rad}$	531.306646
$R1e$	0.030000	$R1i$	0.020000	Rs	0.050000	$T12$	377.372222
Tc	288.150000	Too	356.808666	Tp	373.150000	$Up3$	500000.000000
$Vs1$	0.000080	eps	0.750000	h	45.000000	$k1$	0.500000
$k2$	10.000000	$s1$	0.010000	$s2$	0.020000	$sigma$	5.67e-8

Esercizio 9.21

Argomento: Scambio termico per conduzione, convezione, irraggiamento

The flat wall sketched in the figure (thickness in the 3rd direction 1 m, $\lambda_A = 3 \text{ W/mK}$, $\lambda_B = 1 \text{ W/mK}$, $\lambda_C = 5 \text{ W/mK}$, $\lambda_D = 4 \text{ W/mK}$, $\lambda_F = 2 \text{ W/mK}$, heat source only in block E) exchanges heat by convection with two fluids, that are in contact with the external faces of the wall ($T_{sx} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_{sx} = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$, $T_{dx} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_{dx} = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$). In addition, it exchanges heat by radiation (on the right side only, with emissivity $\varepsilon_p = 0.7$) with another flat wall, which can be approximated as black and which has surface temperature $T_s = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ (the two wall are near enough to consider them as including a cavity). The upper and lower surfaces of the wall are perfectly adiabatic and the temperature of the right face of block F is $220 \text{ }^\circ\text{C}$. Knowing that the system is in steady-state conditions:

1. calculate the temperature of the left face of block E;
2. prove if the conductivity of block E may be 0.5.



SOLUZIONE:

%DATA

```

%conductivities
lbdA=3;
lbdB=1;
lbdC=5;
lbdD=4;
lbdF=2;

l1=20e-3;
l2=30e-3;
ltot=50e-3;

s=10e-3;

s3=1; %thickness in the 3rd direction, no influence on the results in
      %the 1D approximation

%heat source
Up3=1e6;

Tsx=100+273.15;
hsx=10;
Tdx=0+273.15;
hdx=15;
TFdx=220+273.15;
Ts=-20+273.15;

ep=0.7;
es=1;

sigma=5.67e-8;

%SOLUTION
%in steady-state conditions, all the generated heat has to be dissipated
%as parallel elements are present, power and not fluxes must be considered

Qp=Up3*(ltot*s*s3);

Qp2dx_conv=-hdx*(Tdx-TFdx);
Qp2dx_rad=-sigma*(Ts^4-TFdx^4)/(1/ep+1/es-1);
Qpdx=(Qp2dx_conv+Qp2dx_rad)*(ltot*s3);

Qpsx=Qp-Qpdx;

%Qpsx=-(Tsx-TEsx)/(1/(hsx*ltot*s3)+s/(lbdA*ltot*s3)+
%      + [ 1/((lbdB*l2*s3)/s+(lbdC*l1*s3)/s) ] +s/(lbdD*ltot*s3));

TEsx=Tsx+Qpsx*(1/(hsx*ltot*s3)+s/(lbdA*ltot*s3)+1/((lbdB*l2*s3)/s+...
      ...+(lbdC*l1*s3)/s)+s/(lbdD*ltot*s3));

%lbdE cannot be 0.5. If one integrate the Poisson equation, fluxes on the
%left and right sides and extreme temperatures of block E should be
%consistent with the fluxes in the left and right direction and the E
%right temperature calculated - as it is done in the exercise - considering

```

```

%the external block. And this would not happen with lbdE=0.5.
%The value of lbdE consistent with steady-state conditions with the given
%temperatures and fluxes imposed by the surrounding blocks and heat
%exchange conditions is 0.01393, as it can be found solving the system with
%the Poisson equation in block E and the following b.c.s:
%TEsx already given
TEdx=TFdx+(Qp2dx_conv+Qp2dx_rad)*s/lbdF;
Qp2sx=Qpsx/(ltot*s3);
Qp2sx_in=-Qp2sx; %Qp2sx was calculated before, but exiting from E, now the
                %flux is needed entering the block, to be consistent with
                %the integration direction
lbdE_calc=-(Up3*s^2/2+Qp2sx_in*s)/(TEdx-TEsx);

```

<i>Qp</i>	500.000000	<i>Qp2dx_conv</i>	3300.000000	<i>Qp2dx_rad</i>	2184.452894	<i>Qp2sx</i>	4515.547106
<i>Qp2sx_in</i>	-4515.547106	<i>Qpdx</i>	274.222645	<i>Qpsx</i>	225.777355	<i>TEdx</i>	520.572264
<i>TEsx</i>	868.412891	<i>TFdx</i>	493.150000	<i>Tdx</i>	273.150000	<i>Ts</i>	253.150000
<i>Tsx</i>	373.150000	<i>Up3</i>	1000000.000000	<i>ep</i>	0.700000	<i>es</i>	1.000000
<i>hdx</i>	15.000000	<i>hsx</i>	10.000000	<i>l1</i>	0.020000	<i>l2</i>	0.030000
<i>lbdA</i>	3.000000	<i>lbdB</i>	1.000000	<i>lbdC</i>	5.000000	<i>lbdD</i>	4.000000
<i>lbdE_calc</i>	0.013927	<i>lbdF</i>	2.000000	<i>ltot</i>	0.050000	<i>s</i>	0.010000
<i>s3</i>	1.000000	<i>sigma</i>	5.67e-8				

Esercizio 9.22

Argomento: Scambio termico per conduzione, convezione, irraggiamento

Una parete piana, indefinitamente estesa lungo due direzioni spaziali, è costituita lungo la terza da tre strati:

- uno strato A, di spessore $s_A = 5 \text{ mm}$ e conduttività $\lambda_A = 12 \text{ W/mK}$, la cui faccia sinistra è perfettamente adiabatica; la faccia destra è in contatto perfetto con lo strato B;
- uno strato B, di spessore $s_B = 15 \text{ mm}$ e conduttività $\lambda_B = 7 \text{ W/mK}$, in cui è presente una generazione interna di potenza termica \dot{U}_B''' pari a 100 kW/m^3 ;
- uno strato C, di spessore $s_C = 10 \text{ mm}$ e conduttività $\lambda_C = 1 \text{ W/mK}$, la cui faccia sinistra è in perfetto contatto con lo strato B, mentre la faccia destra è lambita da aria umida, a $P = 1 \text{ bar}$, che lontano dalla parete ha umidità relativa $\varphi = 30\%$ e umidità assoluta $X = 0.006 \text{ kg}_V/\text{kg}_{AS}$.

Sapendo che il sistema è in condizioni stazionarie e che la temperatura all'interfaccia tra gli strati B e C è $75 \text{ }^\circ\text{C}$, determinare il coefficiente convettivo tra la faccia destra dello strato C e l'aria umida che la lambisce.

SOLUZIONE:

```
%dati
sA=5e-3;
sB=15e-3;
sC=10e-3;

kA=12;
kB=7;
kC=1;

U3=100e3;

fi=0.3;
X=0.006;
Ptot=100000;

T_Csx=75+273.15; %il passaggio ai K in verità qui è inutile

%calcolo flusso da smaltire, che va tutto a dx perchè a sx arriverebbe
%infine ad una faccia adiabatica (lo strato A in sostanza è tutto isoterma)
Q2=U3*sB;

%si sa poi che  $Q'' = -k_C/s_C*(T_{Cdx}-T_{Csx}) = -h*(T_{oo}-T_{Cdx})$ , e che  $T_{oo}$  è
%l'unica incognita nella relazione  $X=0.622*fi*Pvs(T_{oo})/[Ptot-fi*Pvs(T_{oo})]$ .
%Dunque esplicitando Pvs in quest'ultima:
%Pvs=X*Ptot/[(0.622+X)*fi]

Pvs=X*Ptot/((0.622+X)*fi);

%T_BS si legge quindi dalla tabella d'acqua a saturazione, cercando la Pvs
%appena calcolata
T_oo=25+273.15; %il passaggio ai K in verità qui è inutile
```

```
%Infine quindi:
T_Cdx=T_Csx-Q2*sC/kC;
h=-Q2/(T_oo-T_Cdx);
```

RISULTATI NUMERICI:

P_{tot}	100000.000000	P_{vs}	3184.713376	$Q2$	1500.000000	$T_C dx$	333.150000
$T_{C sx}$	348.150000	T_{oo}	298.150000	$U3$	100000.000000	X	0.006000
fi	0.300000	h	42.857143	kA	12.000000	kB	7.000000
kC	1.000000	sA	0.005000	sB	0.015000	sC	0.010000

Esercizio 9.23

Argomento: Scambio termico per conduzione, convezione, irraggiamento

Un cilindro pieno di raggio $R = 0.1$ m, infinitamente lungo, è sede di una generazione interna di potenza uniforme $\dot{U}''' = 10^5$ W/m³. Esternamente il cilindro è investito da una corrente di aria secca a $T_\infty = 290$ K, con conduttività termica $\lambda = 0.0253$ W/mK e velocità $w_\infty = 10$ m/s trasversale all'asse del cilindro. Il coefficiente convettivo h per lo scambio tra aria e cilindro deve essere stimato con quella opportuna tra le correlazioni fornite in coda al testo. I gruppi adimensionali potenzialmente di interesse valgono rispettivamente $Pr = 0.714$, $Re = 135135$ e $Gr = 1.5 \cdot 10^8$. Sapendo che il sistema è in condizioni stazionarie, determinare che valore deve avere la conduttività del materiale che costituisce il cilindro perchè la temperatura sull'asse del cilindro sia $T(r = 0) = 150$ °C.

Re_D	C	m
0.4–4	0.989	0.330
4–40	0.911	0.385
40–4000	0.683	0.466
4000–40,000	0.193	0.618
40,000–400,000	0.027	0.805

Correlazioni per la stima di h

$$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.7)$$

$$\overline{Nu}_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (0.6 \leq Pr \leq 50)$$

$$\overline{Nu}_D = 0.75 (Gr_D/4)^{1/4} Pr^{1/2} \quad (Pr \geq 1, Gr_D \leq 10^{16})$$

SOLUZIONE:

```
%DATI
R=0.1;
```

```

Up3=1e5;
woo=10;
Too=290;
Pr=0.714; %(@ 290 K)
ni=1.48e-5;
lambda_f=0.0253;
To=150+273.15;

%SOLUZIONE
D=2*R;
ReD=woo*D/ni;

Tp=411.36;
GrD=9.806*1/Too*abs(Too-Tp)*D^3/ni^2;
conv=GrD/ReD^2;

C=0.027;
m=0.805;

NuD=C*ReD^m*Pr^(1/3);

h=NuD*lambda_f/D;

%integrando l'equazione di Poisson 1D in coordinate cilindriche, ponendo
%C1=0 dato che è cilindro pieno e C2=T0 (T sull'asse), risolvendo rispetto
%alla conduttività si ha:
lambda_c=-Up3*R^2/(4*(Up3*R/(2*h)+Too-To));

```

RISULTATI NUMERICI:

C	0.027000	D	0.200000	GrD	149877353.215284	NuD	325.735406
Pr	0.714000	R	0.100000	ReD	135135.135135	To	423.150000
Too	290.000000	Tp	411.360000	$Up3$	100000.000000	$conv$	0.008207
h	41.205529	$lambda_c$	21.173772	$lambda_f$	0.025300	m	0.805000
ni	0.000015	woo	10.000000				

Esercizio 9.24

Argomento: *Evaporazione parziale con calcolo entropico*

Una portata $\dot{M} = 0.05 \text{ kg/s}$ di acqua liquida saturo a $P = 1 \text{ bar}$ deve essere fatta passare completamente in condizioni di vapore saturo mentre scorre in un condotto ($D_i = 50 \text{ mm}$, $D_e = 54 \text{ mm}$, $k = 100 \text{ W/mK}$).

Sapendo che:

- $h_{\text{interno}} = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ (costante durante tutto il processo di evaporazione);
- $h_{\text{esterno}} = 250 \text{ W/m}^2\text{K}$;
- T_{∞} esterna = $125 \text{ }^\circ\text{C}$ costante e uniforme;

- i contributi radiativi sono trascurabili;
- all'interno del condotto si ha dello sporcammento ($R_{fi} = 0.00035 \text{ m}^2 \text{ K/W}$);

determinare:

1. se una lunghezza del tratto di condotto pari a $L = 20 \text{ m}$ è sufficiente per completare l'evaporazione;
2. l'entropia specifica della miscela / vapore all'uscita dal tratto di condotto.

Soluzione:

1. A P = 1 atm: $\lambda_{\text{liquido-vapore}} = 2246 \text{ kJ/kg}$.

Per far evaporare completamente 0.05 kg di acqua liquida satura sono quindi necessari $0.05 \text{ kg/s} * 2246 \text{ kJ/kg} = 112300 \text{ W}$.

Attraverso la superficie laterale vengono ricevuti:

$$\dot{Q} = - \left(\frac{1}{h_i A_i} + R_{fi}/A_i + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_e A_e} \right)^{-1} (T_{fi} - T_\infty) = 15482 \text{ W}$$

non sufficienti per l'evaporazione completa.

2. Poiché l'evaporazione non è completa, in uscita dal condotto si ha una miscela liquido + vapore, con entropia:

$$s_M = x \cdot s_{VS} + (1 - x) \cdot s_{LS} \quad \text{e cioè} \quad s_M = \frac{\dot{Q}_{ric}}{\dot{Q}_{nec}} \cdot s_{VS} + \left(1 - \frac{\dot{Q}_{ric}}{\dot{Q}_{nec}} \right) * s_{LS} = 2141 \text{ J/kgK};$$

```
M=0.05;
Di=50e-3;
De=54e-3;
lbd=100;
hi=1000;
he=250;
Te=125+273.15;
Rfi=0.00035;
L=20;
```

```
%a Patm
Ti=100+273.15;
DhLV=2246e3;
sls=1.307e3;
svs=7.354e3;
```

```
%per evaporazione completa servirebbero
Qevap_richiesto=M*DhLV;
```

```
%attraverso le pareti laterali si ricevono:
```

```
Ai=pi*Di*L;
```

```
Ae=pi*De*L;
```

```
Qricevuto=-(Ti-Te)/(1/(hi*Ai)+Rfi/Ai+log(De/Di)/(2*pi*L*lbd)+1/(he*Ae));
```

```

%evaporazione non completa, xv=?
xv=Qricevuto/Qevap_richiesto;

s_mix=xv*svs+(1-xv)*sls;

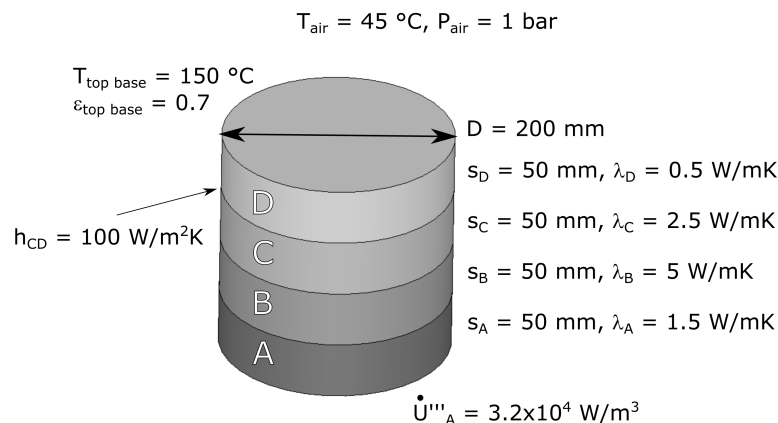
```

Esercizio 9.25

Argomento: Coordinate cartesiane anche se non sembra

Un sistema è composto da quattro dischi spessi, tre passivi e uno attivo, come rappresentato in figura. All'interfaccia tra i dischi C e D si ha una resistenza di contatto, mentre in tutti gli altri casi il contatto termico è perfetto. La base inferiore del disco A e le superfici esterne di tutti i dischi sono perfettamente adiabatiche, mentre la base superiore del disco B scambia per convezione con aria e per irraggiamento con le pareti (isoterme) dell'ampia stanza che contiene il sistema. Sapendo che il sistema è in condizioni stazionarie, determinare:

1. il coefficiente di scambio convettivo tra la superficie superiore del disco D e l'aria (usando quella idonea tra le correlazioni fornite a fondo testo);
2. la temperatura delle pareti della stanza;
3. la temperatura dell'interfaccia tra i dischi A e B;
4. la massima temperatura raggiunta nel sistema.



$$\overline{Nu}_D = 0.683 Re_D^{0.466} Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.4)$$

$$\overline{Nu}_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (0.2 \leq Pr \leq 20)$$

$$\overline{Nu}_D = 0.75 Ra^{1/4} \quad (Pr \geq 0.6, Gr_D \leq 10^{16})$$

SOLUZIONE:

```

%INPUT DATA
D=200e-3;
sA=50e-3;
sB=sA;

```

```

sC=sA;
sD=sA;

lbdA=1.5;
lbdB=5;
lbdC=2.5;
lbdD=0.5;

Up3A=3.2e4;

hCD=100;

Tt=150+273.15;
epst=0.7;
Ta=45+273.15;

g=9.806;
sigma=5.67e-8;

%SOLUTION

%convective coefficient
Tfilm=(Tt+Ta)/2;
P=1e5;

MM_a=29;
lbd_a=31.402e-3;
mu_a=21.758e-6;
Rs_a=8314/MM_a;

cp_a=7/2*Rs_a;
rho_a=P/(Rs_a*Tfilm);
Pr_a=cp_a*mu_a/lbd_a;

beta=1/Tfilm;

GrD=g*beta*abs(Tt-Ta)*D^3*rho_a^2/mu_a^2;

RaD=GrD*Pr_a;

NuD=0.75*RaD^(1/4);

h=NuD*lbd_a/D;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Qp2=Up3A*sA;

Qp2conv=-h*(Ta-Tt);

Qp2rad=Qp2-Qp2conv;

Ts=(Tt^4-Qp2rad/(epst*sigma))^(1/4);

```

$$Q_{p2max} = -\epsilon_{pst} \sigma (0^4 - T_t^4);$$

%%%

$$R_{tot} = s_B / l_{dB} + s_C / l_{dC} + 1 / h_{CD} + s_D / l_{dD};$$

$$T_{AB} = T_t + Q_{p2} \cdot R_{tot};$$

%%%

%from integration of the Poisson equation, with $Q_{p2}(0) = 0$ and $T(s_A) = T_{max}$
 $T_{max} = T_{AB} + U_{p3A} \cdot s_A^2 / (2 \cdot l_{dA});$

Esercizio 9.26

Argomento: Forno da essiccazione

A oven for desiccation can be approximated as a prism with length $L = 20$ m and equilateral triangular cross section with side $l = 1.5$ m. The upper sides are the oven walls. They are kept at a fixed temperature $T_w = 900$ °C and can be assumed as gray surfaces with $\epsilon = 0.85$. The humid material is placed on the oven base, completely covering it. The humid material enters the oven at a temperature $T_m = 35$ °C and it behaves as a black body. It is also known that when it exits the oven, it is still slightly humid (the desiccation is not complete). As the oven base is horizontally translating, a relative velocity $w_a = 0.2$ m/s exists between the humid material and the [dry] air stream, which is at a temperature $T_a = 500$ °C (for the calculation of the convective coefficient, the oven base can be assumed as a flat plate in a freestream). Assuming that only radiation in the band of wavelengths between 10^{-1} μm and 10^2 μm is effective in drying the humid material, determine the water mass flow rate that evaporates in the oven.

SOLUZIONE:

Assuming that the border effects at the entry and exit of the oven are negligible, the oven may be approximated as a cavity enclosed by the two upper sides (which are at the same temperature so they may be considered as a single node for heat transfer) and the base.

The net radiation exchange between walls and base may be therefore calculated as:

$$\dot{E}_{w,m} = - \frac{\sigma (T_m^4 - T_w^4)}{\frac{1 - \epsilon_w}{\epsilon_w A_w} + \frac{1}{A_w F_{w \rightarrow m}} + \frac{1 - \epsilon_m}{\epsilon_m A_m}} = 2946.6 \text{ kW}$$

where $A_w = 2 \cdot L \cdot l$ and $A_m = L \cdot l$.

As the cross-section is an equilateral triangle, the view factor $F_{w \rightarrow m}$ is 1/2 (for a generic triangle it would have been equal to the cosine of half of the top angle). An even simpler way would have been to consider the reciprocity rule and use $A_m F_{m \rightarrow w}$ in the denominator of the [denominator of the] central term of the, as the view factor for the base looking at the walls is 1.

Of the exchanged radiation, only the fraction in the band $10^{-1} \leq \lambda \leq 10^2$ is assumed as effective in drying the humid material. Selecting the limits of this band for the oven walls (that gives the

dominating contribution in the process) and using the blackbody tables:

$$(\lambda T)_{min} = 1.1732 \cdot 10^{-4} \mu\text{m K} \rightarrow F_{0 \rightarrow \lambda} \approx 0$$

$$(\lambda T)_{max} = 0.1173 \mu\text{m K} \rightarrow F_{0 \rightarrow \lambda} \approx 1$$

So given the temperature of the oven walls, practically all the emitted radiation is in the band of interest.

Concerning convection, the Reynolds number for the relative motion between air and the material is $Re_L = \rho_a w_a L / \mu_a$. With the thermophysical properties evaluated at $T_f = (T_a + T_m) = 540.65 \text{ K}$ (i.e. $\rho_a = 0.6441 \text{ kg/m}^3$, $\mu_a = 28.623 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}$, $4.2455 \cdot 10^{-2} \text{ W/mK}$, $Pr = 0.7$), $Re = 90012$.

Therefore, the flow is laminar over the whole oven base. With $Pr = 0.7$:

$$Nu_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} = 176.882 \text{ and } h = Nu_L \lambda_a / L = 0.3755 \text{ W/m}^2\text{K}$$

and heat transfer rate by convection is:

$$\dot{Q}_{a,m} = -h A (T_m - T_a) = 5.238 \text{ kW}; \text{ kW}$$

Convection gives a very small contribution to the total heat transfer.

Finally, the mass flow rate of evaporating water is:

$$\dot{M}_{H_2O} = \frac{\dot{E}_{w,m} + \dot{Q}_{a,m}}{\lambda_{LV}} = 1.22 \text{ kg/s}$$

Listato Matlab:

```
%INPUT DATA
l=1.5;
L=20;
Tm=35+273.15;
Tw=900+273.15;
em=1;
ew=0.85;
T_a=500+273.15;
w_a=0.2;
sigma=5.67e-8;

%SOLUTION
%from water tables:
Dh1v=2418e3;

%from air tables:
Tf=(Tm+T_a)/2;
rho_a=0.6441;
mu_a=2.8623e-5;
lbd_a=4.2455e-2;
Pr_a=0.7;

%radiation
Fmw=1;
Am=1*L;
Aw=2*1*L;
```



```

Qdrad=-sigma*(Tm^4-Tw^4)/((1-em)/(em*Am)+1/(Fmw*Am)+(1-ew)/(ew*Aw));

%convection
Re_L=rho_a*w_a*L/mu_a;
Nu_L=0.664*Re_L^(1/2)*Pr_a^(1/3);
h_a=Nu_L*1bd_a/L;
Qdconv=-h_a*Am*(Tm-T_a);

Qdtot=Qdrad+Qdconv;

Md=Qdtot/Dhlv;

```

Esercizio 9.27

Argomento: Convezione forzata laminare

A perfectly horizontal and flat plate is isothermal at $T_w = 47^\circ\text{C}$. Air is flowing over it with $T_\infty = 7^\circ\text{C}$, $P_\infty = 10^5\text{ Pa}$, $w_\infty = 15\text{ m/s}$.

1. Calculate the local heat flux from the plate to the external air at a coordinate $x = 0.1\text{ m}$ from the leading edge of the plate.
2. Calculate the averaged heat flux from the plate to the external air over the length between the leading edge of the plate and the coordinate at which the transition between laminar and turbulent flow is conventionally assumed to occur.

SOLUZIONE:

```

%INPUT DATA
P=1e5;
Tw=47+273.15;
Too=7+273.15;
woo=15;

%SOLUTION
T_film=(Tw+Too)/2;

%@ Tfilm:
l_air=26.384e-3;
m_air=18.537e-6;
R=8314/29;
r_air=1e5/(R*Too);
cp_air=7/2*R; %ideal gas assumption

Pr=cp_air*m_air/l_air;

%case 1:
Dcar_1=0.1; %L
Re_x=r_air*woo*Dcar_1/m_air;
Nu_x=0.332*Re_x^(1/2)*Pr^(1/3);

```

```

h_x=Nu_x*l_air/Dcar_1;
Qp2_x=-h_x*(Tw-Too);

%case 2:
%transition between laminar and turbulent for external convection over flat
%plates is for Re=1e5 =>...
Re_tr=5e5;
Dcar_2=Re_tr*m_air/(r_air*woo);
Nu_L=0.664*Re_tr^(1/2)*Pr^(1/3);
h_L=Nu_L*l_air/Dcar_2;
Qp2_L=-h_L*(Tw-Too);

```

RISULTATI NUMERICI:

$Dcar_1$	0.100000	$Dcar_2$	0.496273	Nu_L	417.874665	Nu_x	93.789803
P	100000.000000	Pr	0.704983	$Qp2_L$	-888.639935	$Qp2_x$	-989.820064
R	286.689655	Re_{tr}	500000.000000	Re_x	100750.952359	Re_{xp}	251877.380897
T_{film}	300.150000	Too	280.150000	Tw	320.150000	cp_{air}	1003.413793
h_L	22.215998	h_x	24.745502	l_{air}	0.026384	m_{air}	0.000019
r_{air}	1.245080	woo	15.000000				

Esercizio 9.28

Argomento: Convezione e irraggiamento

A cryogenic container, to be kept at a surface temperature $T_1 = -180$ °C, can be roughly approximated as a full sphere having $D_1 = 400$ mm, with a negative heat source \dot{U}_1''' to model the heat removal by the coolant (whose pipes can be neglected in the analysis, as all other supports, etc.). Such a container is placed at the centre of two concentric hollow spherical shells having negligible thickness, the first with $D_2 = 800$ mm and the second with $D_3 = 1$ m. The resulting system is located in a very large room in which the walls, floor and ceiling are at $T_r = 25$ °C. Emissivity of the external surface of the container is $\varepsilon_1 = 0.2$, while for both the shells the emissivities are equal to 0.1 ($\varepsilon_2 = 0.1$ and $\varepsilon_3 = 0.1$). It is also known that the surface temperature of the external shell is $T_3 = 20$ °C. Convection within the external shell (both between the two shells and between the container and the inner shell) is negligible, while it is significant between the external shell and the room air with a convective coefficient $h_{3e} = 10$ W/m²K. Knowing that the system is in steady-state conditions, determine the values of the power to be removed by the coolant \dot{U}_1 , of the heat source \dot{U}_1''' and of the room air temperature T_∞ .

SOLUZIONE:

```

%INPUT DATA
T1=-180+273.15;
D1=400e-3;
D2=800e-3;
D3=1;
Tr=25+273.15;
T3=20+273.15;

```

```

h3e=10;
eps1=0.2;
eps2=0.1;
eps3=0.1;
sigma=5.67e-8;

%SOLUTION

%to be in steady-state conditions, heat received by the surrounding ambient
%must be completely removed by the negative heat source
%So externally:
A3=4*pi*D3^2/4;
%Up31*V1-h3e*A3*(T3-Too)-eps3*sigma*A3*(T3^4-Tr^4)=0 (1)
%while between the two shells:
A1=4*pi*D1^2/4;
A2=4*pi*D2^2/4;
F12=1;
F23=1;
Rrad12=(1-eps1)/(eps1*A1)+1/(F12*A1)+(1-eps2)/(eps2*A2);
Rrad23=(1-eps3)/(eps3*A3)+1/(F23*A2)+(1-eps2)/(eps2*A2);
%-sigma*(T2^4-T1^4)/Rrad12-sigma*(T2^4-T3^4)/Rrad23=0 (2)
%and between the inner shell and the container:
%Up31*V1-sigma*(T1^4-T2^4)/Rrad12=0 (3)
%From (2):
%(T2^4-T1^4)*Rrad23+(T2^4-T3^4)*Rrad12=0
%T2^4*(Rrad12+Rrad23)=T1^4*Rrad23+T3^4*Rrad12
T2=((T1^4*Rrad23+T3^4*Rrad12)/(Rrad12+Rrad23))^(1/4);
%Now from (3):
Up1=sigma*(T1^4-T2^4)/Rrad12;
V1=4/3*pi*(D1/2)^3;
Up31=(sigma*(T1^4-T2^4)/Rrad12)/V1;
%And from (1):
Too=T3-(Up31*V1-eps3*sigma*A3*(T3^4-Tr^4))/(h3e*A3);

%verification
Qrad12=-sigma*(T2^4-T1^4)/Rrad12;
Qrad32=-sigma*(T2^4-T3^4)/Rrad23;
Qrade=-eps3*sigma*A3*(T3^4-Tr^4);
Qconve=-h3e*A3*(T3-Too);
Qtote=Qrade+Qconve;

```

RISULTATI NUMERICI:

Esercizio 9.29

Argomento: Transitorio a parametri concentrati

A cylindrical steel rod ($\lambda = 40 \text{ W/mK}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $c = 450 \text{ J/kgK}$, $D = 0.01 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$) is at an initial temperature $T_0 = 250 \text{ }^\circ\text{C}$. At instant $\tau = 0$ it is immersed in a cross-flow stream of air (at $T_\infty = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ and having with the rod a convective coefficient $h = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$) that cools it down to $T_f = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Neglecting heat transfer across the cylinder bases:

1. verify if the lumped parameter approach can be used

<i>A1</i>	0.502655	<i>A2</i>	2.010619	<i>A3</i>	3.141593	<i>D1</i>	0.400000
<i>D2</i>	0.800000	<i>D3</i>	1.000000	<i>F12</i>	1.000000	<i>F23</i>	1.000000
<i>Qconve</i>	9.410764	<i>Qrad12</i>	-18.617966	<i>Qrad32</i>	18.617966	<i>Qrade</i>	9.207201
<i>Qtote</i>	18.617966	<i>Rrad12</i>	14.423417	<i>Rrad23</i>	7.838381	<i>T1</i>	93.150000
<i>T2</i>	263.370267	<i>T3</i>	293.150000	<i>Too</i>	293.449554	<i>Tr</i>	298.150000
<i>Up1</i>	-18.617966	<i>Up31</i>	-555.588986	<i>V1</i>	0.033510	<i>eps1</i>	0.200000
<i>eps2</i>	0.100000	<i>eps3</i>	0.100000	<i>h3e</i>	10.000000	<i>sigma</i>	5.67e-8

2. calculate the time needed to cool the rod to T_f
3. calculate the total heat amount removed from the rod during the cooling process
4. calculate the time-averaged heat transfer rate and heat flux from the external surface of the rod

SOLUZIONE:

%INPUT DATA

```

lbd_s=40;
rho_s=7800;
c=450;
D=1e-2;
L=1;
Tsi=250+273.15;
Too=10+273.15;
h=20;
Tsf=25+273.15;
P=1e5;
R=8314/29;

```

%SOLUTION

```

%to use the lumped parameter approach, Bi has to be <<1
%Neglecting heat transfer across the cylinder bases:

```

```

V=pi*D^2/4*L;
A=pi*D*L;
Bi=h*(V/A)/lbd_s;

```

```

%time needed for the cooling process:
tau=-rho_s*c*V/(h*A)*log((Tsf-Too)/(Tsi-Too));

```

```

%total heat amount
%from an energy balance Q=DU:
Q=rho_s*V*c*(Tsf-Tsi);
%averaged heat transfer rate and flux
Qp=Q/(tau-0);
Qp2=Qp/A;

```

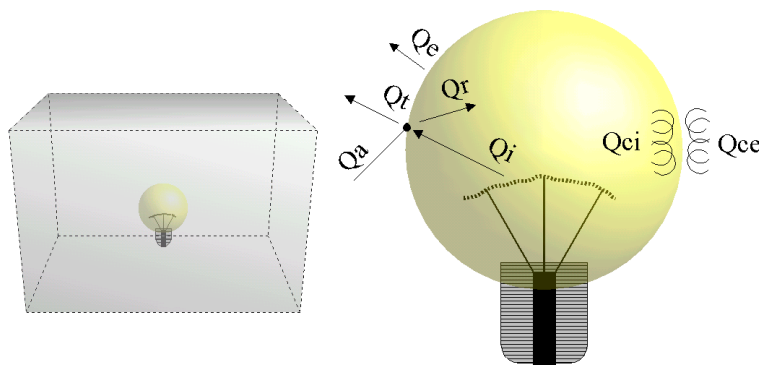
RISULTATI NUMERICI:

A	0.031416	Bi	0.001250	D	0.010000	L	1.000000
P	100000.000000	Q	-62026.819954	Q_p	-50.989052	Q_{p2}	-1623.031921
R	286.689655	T_{oo}	283.150000	T_{sf}	298.150000	T_{si}	523.150000
V	0.000079	c	450.000000	h	20.000000	lbd_s	40.000000
ρ_{os}	7800.000000	τ	1216.473302				

Esercizio 9.30 (esercizio di approfondimento)

Argomento: Irraggiamento e convezione

Si accende una lampadina di potenza \dot{L}_{NDI} in una grande stanza in cui l'aria è a T_a (h_a noto). Esaurito il transitorio, determinare la temperatura del vetro (coefficienti r , a , t per incidenza normale) della lampadina mentre è accesa, se la stessa è approssimabile a sferica di diametro D_l .



SOLUZIONE:

La lampadina è molto piccola rispetto alla stanza, e le pareti sono a temperatura molto più bassa di quella della lampadina. Quindi si possono considerare le pareti nere dal punto di vista della lampadina, e trascurare qualsiasi trasmissione di potenza per irraggiamento dalle pareti alla lampadina. Allo stesso modo si può ragionare per gli scambi energetici per irraggiamento tra filamento e vetro nella lampadina.

A questo punto si può focalizzare l'attenzione sul sistema "vetro", che è quello di interesse.

Dato il ridottissimo spessore del vetro, si può trascurare la conduzione all'interno dell'involucro della lampadina approssimandolo ad isoterma. La superficie interna e quella esterna della lampadina sono inoltre considerabili di pari estensione $A = 4 \cdot \pi \cdot D_l^2 / 4$.

Gli scambi termici presenti sono dunque:

- per convezione sulla faccia interna della lampadina, tra il vetro e l'argon contenuto nella stessa:

$$\dot{Q}_{ci} = -h_i \cdot A \cdot (T_v - T_{Ar})$$

Per semplicità, si trascurerà questo contributo perchè è ridotto e concettualmente del tutto analogo a quello di convezione esterna.

- per convezione sulla faccia esterna della lampadina, tra il vetro e l'aria della stanza:

$$\dot{Q}_{ce} = -h_e \cdot A \cdot (T_v - T_a)$$

- $\dot{Q}_{i0} = \dot{Q}$ emessa dal filamento, che a sua volta è data da $\dot{Q} = \varepsilon_{tungsteno} \cdot \sigma \cdot A_{filamento} \cdot T_{filamento}^4$, ma più semplicemente pari a \dot{L}_{NDI} .

- $\dot{Q}_{r0} = r \cdot \dot{Q}_{i0}$ ma \dot{Q}_{r0} va a sua volta a ri-incidere sul vetro della lampadina (date le dimensioni relative solo una parte trascurabile incide sul filamento) e a sua volta viene scissa nei tre contributi riflesso, assorbito e trasmesso. E via così... “all’infinito”?

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{r0} &= r \cdot \dot{Q}_{i0} \\ \dot{Q}_{r1} &= r \cdot (r \cdot \dot{Q}_{i0}) = r^2 \cdot \dot{Q}_{i0} \\ \dot{Q}_{r2} &= r \cdot (r^2 \cdot \dot{Q}_{i0}) = r^3 \cdot \dot{Q}_{i0} \\ &\dots \\ \dot{Q}_{rj} &= r^{j+1} \cdot \dot{Q}_{i0}\end{aligned}$$

Dunque considerando la quota parte assorbita:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{a0} &= a \cdot \dot{Q}_{i0} \\ \dot{Q}_{a1} &= a \cdot (r \cdot \dot{Q}_{i0}) \\ \dot{Q}_{a2} &= a \cdot (r^2 \cdot \dot{Q}_{i0}) \\ &\dots \\ \dot{Q}_{aj} &= a \cdot (r^j \cdot \dot{Q}_{i0})\end{aligned}$$

$$\dot{Q}_{a,tot} = \sum_{j=0}^{\infty} a \cdot (r^j \cdot \dot{Q}_{i0}) = a \cdot \dot{Q}_{i0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} r^j$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione < 1 , che converge a:

$$\dot{Q}_{a,tot} = a \cdot \dot{Q}_{i0} \cdot \frac{1}{1-r}$$

- allo stesso modo per la parte trasmessa (che non interessa però per il bilancio):

$$\dot{Q}_{t,tot} = t \cdot \dot{Q}_{i0} \cdot \frac{1}{1-r}$$

- infine va considerata la potenza emessa dal vetro della lampadina:

$$\dot{Q}_{e0} = -\varepsilon_{vetro} \cdot \sigma \cdot A \cdot T_v^4$$

con $\varepsilon_{vetro} \simeq a_{vetro}$.

\dot{Q}_{e0} viene emessa sia verso l'esterno della lampadina che verso l'interno della stessa; \dot{Q}_{e0} emessa verso l'interno si comporta come i contributi \dot{Q}_{i0} e \dot{Q}_{r0} venendo ogni volta in parte riflessa, in parte assorbita ed in parte trasmessa:

$$\dot{Q}_{a,tot} \text{ da } \dot{Q}_e = a \cdot \dot{Q}_{e0} \cdot \frac{1}{1-r}$$

Il bilancio energetico del vetro della lampadina in condizioni stazionarie è quindi:

$$\dot{Q}_{a,tot\ da\ \dot{Q}_i} + \dot{Q}_{a,tot\ da\ \dot{Q}_e} + \dot{Q}_{e0\ verso\ l'esterno} + \dot{Q}_{e0\ verso\ l'interno} + \dot{Q}_{ce} + \dot{Q}_{ci} = 0$$

esplicitando e trascurando come già detto \dot{Q}_{ci} :

$$a \cdot \dot{L}_{NDI} \cdot \frac{1}{1-r} + \left(a \cdot \frac{1}{1-r} - 2 \right) \cdot \varepsilon_{vetro} \cdot \sigma \cdot A \cdot T_v^4 - h_a \cdot A \cdot (T_v - T_a) = 0$$

Una equazione algebrica di 4° grado da risolvere numericamente. La soluzione è estremamente sensibile a variazioni dei parametri (ad esempio il diametro della lampadina).

Si noti anche che data la trasparenza della lampadina il contributo dominante è quello convettivo.

Esercizio 10.1

Argomento: Shell-and-tube heat exchanger / part of the Rankine cycle

Water vapour with mass flow rate $\dot{M}_v = 100$ kg/s enters a steam turbine (having isentropic coefficient $\eta_{is} = 0.8$) at $T_{v1} = 650$ °C, $P_{v1} = 175$ bar and is expanded to a final pressure $P_{v2} = 20$ kPa. After exiting the turbine the water/steam mixture enters a shell-and-tube heat exchanger, shell side, where it completely condenses with a heat transfer coefficient $h_e = 5000$ W/m²K. Within the $N = 5000$ tubes of the heat exchanger (having $D_i = 30$ mm, thickness $s = 2$ mm, conductivity $\lambda = 300$ W/mK) an unknown mass flow rate \dot{M}_a of water (dynamic viscosity $\mu_a = 8.544 \cdot 10^{-4}$ kg/m s, conductivity $\lambda_a = 0.608$ W/mK) is heated from $T_{ai} = 25$ °C to $T_{au} = 35$ °C. Calculate:

- steam mass fraction at the outlet of the turbine;
- mechanical power given by the turbine and heat flow rate exchanged in the condenser;
- convective heat transfer coefficient h_i within the tubes;
- length of the tubes in the condenser.

Correlations to calculate h within ducts:

- $Re < 2500$ (laminar flow) $Nu = 3.66$ for uniform duct temperature, $Nu = 4.36$ for uniform heat flux exchanged with the duct walls;
- $Re > 4000$ (turbulent flow) $Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ with $n = 0.4$ for fluid heating, $n = 0.3$ for fluid cooling.

SOLUZIONE:

```
%INPUT DATA
```

```
Mv=100;
```

```
Tv1=650+273.15;
```

```
Pv1=175e5;
```

```
etaIS=0.8;
```

```
Pv2=20e3;
```

```
he=5000;
```

```
Nt=5000;
```

```

Dti=30e-3;
st=2e-3;
lt=300;

mia=8.544e-4;
la=0.608;
cpa=4186;
rhoa=1000;
Tai=25+273.15;
Tau=35+273.15;

%SOLUTION
%TURBINE CALCULATION
%IDEAL TURBINE
hv1=3693.9e3;
sv1=6.7357e3;
sv2=sv1;
hls2=251.40e3;
hvs2=2609.7e3;
sls2=0.8320e3;
svs2=7.9085e3;
xv2id=(sv2-sls2)/(svs2-sls2);
hv2id=xv2id*hvs2+(1-xv2id)*hls2;
lidturb=hv2id-hv1;
Lidturb=Mv*lidturb;
%REAL TURBINE
lrturb=etaIS*lidturb;
Lrturb=etaIS*Lidturb;

%REAL ENTHALPHY AND MASS FRACTION AT THE OUTLET
hv2r=hv1+lrturb;
xv2r=(hv2r-hls2)/(hvs2-hls2);
Tv2=60.06+273.15; %AT THE OUTLET TWO-PHASE FLOW @ Tsat(Pv2)

%HEAT EXCHANGER CALCULATION
%AS COMPLETE CONDENSATION OCCURS...
Qh=Mv*(hls2-hv2r);
%Qh IS GIVEN TO THE WATER MASS FLOW RATE
Ma=-Qh/(cpa*(Tau-Tai));

%THE WATER MASS FLOW RATE FLOWS IN TUBES WITH KNOWN SECTION
A1t_cr=pi*Dti^2/4;
ANt_cr=Nt*A1t_cr;
%WATER SPEED IN THE TUBES
wa=Ma/(rhoa*ANt_cr);

%DIMENSIONLESS GROUPS
Rea=rhoa*wa*Dti/mia;
Pra=cpa*mia/la;

%THE FLOW IS TURBULENT, WITH A FLUID HEATED...
Nua=0.023*Rea^0.8*Pra^0.4;
hi=Nua*la/Dti;

```

```

%NO FOULING, THUS THE TOTAL RESISTANCE IS...
%Ktot=1 / [ 1/(hi Ai) + ln(De/Di)/(2 pi lt L Nt) + 1/(he Ae) ]
%NEGLECTING THE CONDUCTIVE CONTRIBUTION...
Dte=Dti+2*st;
Ui=(1/hi+Dti/Dte*1/he)^-1;
%WITHOUT NEGLECTING IT...
Ui_true=(1/hi+Dti*log(Dte/Dti)/(2*lt)+Dti/Dte*1/he)^-1;

%BEING Qp=Ui Ai DTml
DT0=Tv2-Tai;
DTL=Tv2-Tau;
DTml=(DTL-DT0)/log(DTL/DT0);
A_side_Nt=-Qh/(Ui*DTml);

%THUS FINALLY: A_side_Nt=pi*Dti*Lt*Nt, from which:
Lt=A_side_Nt/(pi*Dti*Nt);

```

RISULTATI NUMERICI:

Alt_{cr}	0.000707	ANt_{cr}	3.534292	$A_{side_{Nt}}$	2660.016751	$DT0$	35.060000
DTL	25.060000	$DTml$	29.780701	Dte	0.034000	Dti	0.030000
Lid_{turb}	-147504494.312160	Lrt_{turb}	-118003595.449728	Lt	5.644731	Ma	5404.835274
Mv	100.000000	Nt	5000.000000	Nua	284.120556	Pra	5.882432
$Pv1$	17500000.000000	$Pv2$	20000.000000	Qh	-226246404.550272	Rea	53695.770935
Tai	298.150000	Tau	308.150000	$Tv1$	923.150000	$Tv2$	333.210000
Ui	2856.027573	Ui_{true}	2805.876820	cpa	4186.000000	eta_{IS}	0.800000
he	5000.000000	hi	5758.176596	$hls2$	251400.000000	$hv1$	3693900.000000
$hv2id$	2218855.056878	$hv2r$	2513864.045503	$hvs2$	2609700.000000	la	0.608000
lid_{turb}	-1475044.943122	lrt_{turb}	-1180035.954497	lt	300.000000	mia	0.000854
$rhoa$	1000.000000	$sls2$	832.000000	st	0.002000	$sv1$	6735.700000
$sv2$	6735.700000	$svs2$	7908.500000	wa	1.529256	$xv2id$	0.834268
$xv2r$	0.959362						

Esercizio 10.2

Argomento: Shell-and-tube heat exchanger

In the $N = 50$ tubes ($D_i = 12$ mm, $D_e = 14$ mm, stainless steel with conductivity $\lambda = 20$ W/mK) of a shell-and-tube counter-current heat exchanger a mass flow rate $\dot{M}_r = 10$ kg/s of a refrigerant fluid (1,1,1,2-Tetrafluoroethane, having $\rho_r = 1206$ kg/m³, $c_{Pr} = 1419$ J/kgK, $\mu_r = 2.02 \cdot 10^{-4}$ Pas, $\lambda_r = 0.0824$ W/mK in the liquid phase) is flowing with an inlet temperature $T_{ri} = 5$ °C. Shell-side, water is flowing with mass flow rate $\dot{M}_w = 2.5$ kg/s and it is cooled from $T_{wi} = 70$ °C to $T_{wu} = 25$ °C. The shell-side convective coefficient is $h_e = 4000$ W/m²K. The thermophysical properties of both fluids can be approximated as constant with temperature. Calculate:

- the heat transfer rate \dot{Q} between the two fluids;
- the refrigerant fluid outlet temperature T_{ru} ;
- the convective heat transfer coefficient h_i within the ducts;
- the total heat transfer coefficient referred to the internal ducts surface U_i knowing that fouling is present within the ducts with a resistance per unit area $R_{fi} = 5 \cdot 10^{-5}$ m²K/W;

- the logarithmic mean temperature difference;
- the length of each tube;
- the distributed pressure drop across each duct.

SOLUZIONE:

%INPUT DATA

```
N=50;
Di=12e-3;
De=14e-3;
lambda=20;
Mr=10;
rhor=1206;
cpr=1419;
mur=2.02e-4;
lambdar=0.0824;
Tri=5+273.15;
Mw=2.5;
cpw=4186;
Twi=70+273.15;
Twu=25+273.15;
he=4000;
Rfi=5e-5;
```

%SOLUTION

%Q

```
Qw=Mw*cpw*(Twu-Twi);
```

%Tru

```
Qr=-Qw;
Tru=Tri+Qr/(Mr*cpr);
```

%CONVECTIVE COEFFICIENT WITHIN THE DUCTS

```
wr=Mr/(N*rhor*pi*Di^2/4);
Rer=wr*Di*rhor/mur;
Prr=cpr*mur/lambdar;
Nur=0.023*Rer^0.8*Prr^0.4;
hi=Nur*lambdar/Di;
```

%Ui

```
%the following are the theoretical relations, N is unknown but it is
%simplified:
%Ai=pi*Di*L*N;
%Ae=pi*De*L*N;
%K=(1/(hi*Ai)+Rfi/Ai+log(De/Di)/(2*pi*lambda*L*N)+1/(hi*Ae))^-1;
Ui=(1/hi+Rfi+log(De/Di)/(2*lambda)*Di+Di/(he*De))^-1;
```

%LMTD

```
%as the heat exchanger is counter-current:
DTO=Twu-Tri;
```

DTL=Tw_i-Tr_u;
 LMTD=(DTL-DT₀)/log(DTL/DT₀);

%TUBE LENGTH
 L=Q_r/(U_i*π*Di*N*LMTD);

%PRESSURE DROP
 f=0.184*Re_r^{-0.2};
 DP_L=f*L/Di*rho_r*w_r²/2;

RISULTATI NUMERICI:

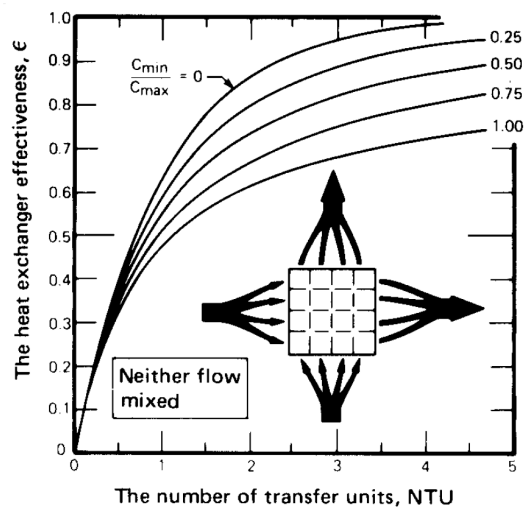
DP_L	13143.943209	DT_0	20.000000	DTL	31.812896	De	0.014000
Di	0.012000	L	6.677173	$LMTD$	25.451178	Mr	10.000000
M_w	2.500000	N	50.000000	N_{ur}	393.927642	P_{rr}	3.478617
Q_r	470925.000000	Q_w	-470925.000000	Re_r	105052.767717	R_{fi}	0.000050
Tr_i	278.150000	Tr_u	311.337104	Tw_i	343.150000	Tw_u	298.150000
U_i	1470.110856	c_{pr}	1419.000000	c_{pw}	4186.000000	f	0.018219
h_e	4000.000000	h_i	2704.969808	λ	20.000000	λ_{bdar}	0.082400
mur	0.000202	ρ_r	1206.000000	w_r	1.466325		

Esercizio 10.3

Argomento: ϵ -NTU method

In a radiator (cross-flow, both fluids unmixed) a mass flow rate $\dot{M}_w = 2$ kg/s of water is flowing within $N = 100$ tubes ($D_i = 5$ mm, $L = 1$ m, negligible thickness) while the external air (atmospheric pressure, mass flow rate $\dot{M}_a = 6.25$ kg/s) is flowing across flat plates having a total surface area which is 20 times the total internal surface area of the ducts. The internal (for water within the ducts) and external (for air outside the ducts) convective coefficients are $h_i = 8000$ W/m²K and $h_e = 400$ W/m²K respectively. The inlet temperatures of water and air are $T_{wi} = 80$ °C and $T_{ai} = 12$ °C respectively. Temperature dependence of all the thermophysical properties may be neglected. Calculate:

- the number of transfer units NTU;
- the capacity ratio $\dot{C}_{min}/\dot{C}_{max}$;
- the heat exchanger effectiveness;
- the outlet temperatures of water and air.



SOLUZIONE:

```
clear

%INPUT DATA
N=100;
Di=5e-3;
L=1;
area_ratio=20;
he=400;
hi=8000;
Mw=2;
Twi=80+273.15;
Ma=6.25;
Tai=12+273.15;

cpw=4186;
Ra=287;
cpa=7/2*Ra;

%SOLUTION

%CAPACITY RATIO

Cw=Mw*cpw;
Ca=Ma*cpa;

Cmin=min(Cw,Ca);
Cmax=max(Cw,Ca);

R=Cmin/Cmax;

%areas
Ai=pi*Di*L*N;
Ae=area_ratio*Ai;

%NTU

%Ui
%K=Ui*Ai=(1/(hi*Ai)+1/(hi*Ae))^-1
Ui=(1/hi+1/(area_ratio*he))^-1;

NTU=Ui*Ai/Cmin;

%EPS AND Q
%from the equation (or the chart) for the eps-NUT method for a cross-flow,
%both fluids unmixed radiator
eps=1-exp(1/R*NTU^0.22*(exp(-R*NTU^0.78)-1));

Qmax=Cmin*(Twi-Tai);
Q=eps*Qmax;
```

%T_{wu} and T_w

$T_{wu} = T_{wi} - Q / (M_w * c_{pw})$;

$Tau = T_{ai} + Q / (M_a * c_{pa})$;

RISULTATI NUMERICI:

<i>Ae</i>	31.415927	<i>Ai</i>	1.570796	<i>Ca</i>	6278.125000	<i>Cmax</i>	8372.000000
<i>Cmin</i>	6278.125000	<i>Cw</i>	8372.000000	<i>Di</i>	0.005000	<i>L</i>	1.000000
<i>Ma</i>	6.250000	<i>Mw</i>	2.000000	<i>N</i>	100.000000	<i>NTU</i>	1.000806
<i>Q</i>	215752.968786	<i>Qmax</i>	426912.500000	<i>R</i>	0.749895	<i>Ra</i>	287.000000
<i>Tai</i>	285.150000	<i>Tau</i>	319.515829	<i>Twi</i>	353.150000	<i>Twu</i>	327.379220
<i>Ui</i>	4000.000000	<i>area_ratio</i>	20.000000	<i>cpa</i>	1004.500000	<i>cpw</i>	4186.000000
<i>eps</i>	0.505380	<i>eps1</i>	0.500000	<i>he</i>	400.000000	<i>hi</i>	8000.000000